Sur quelques variétés algébriques à trois dimensions ayant des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

On sait que si l'on considère une involution du second ordre appartenant à une surface F de genres un ($p_a = P_4 = 1$), c'est-à-dire à une surface dont les courbes canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro, une surface Φ, image de l'involution, est de genres un ($p_a = P_4 = 1$) si l'involution possède un nombre fini de points unis (et précisément huit points unis), ou de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) si l'involution est dépourvue de points unis (1). Dans ce dernier cas, la surface Φ est dépourvue de courbe canonique et de courbes pluricanoniques d'indices impairs, mais elle possède des courbes pluricanoniques d'indices pairs, d'ordre zéro; c'est la surface d'Enriques. Si au contraire on considère une involution du second ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions V, dont les surfaces canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro, une variété Ω image de cette involution a toutes ses surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro si l'involution est dépourvue de points unis; elle est au contraire dépourvue de

(1) Le théorème est dû à MM. Enriques et Severi, qui l'ont publié dans leur « Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques » (*Acta Mathematica*, 1909, t. 33, pp. 283-392; t. 33, pp. 321-399). On trouvera la bibliographie relative à ces questions dans nos exposés : *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (Paris, Hermann, 1934); *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

surface canonique et de surfaces pluricanoniques d'indices impairs, mais possède des surfaces pluricanoniques d'indices pairs, d'ordre zéro, si l'involution possède un nombre fini de points unis [1]. Il y a là un résultat un peu inattendu : le passage de deux à trois dimensions renverse les conclusions.

On peut illustrer le résultat concernant les surfaces en considérant soit une surface du quatrième ordre lieu des couples de points conjugués par rapport à quatre quadriques linéairement indépendantes (sans point commun), soit une surface du quatrième ordre lieu des couples de points conjugués par rapport à trois quadriques ayant huit points distincts en commun et à un système-nul. Dans ce travail, nous considérons de même les hypersurfaces du cinquième ordre d'un espace linéaire à quatre dimensions, lieu des couples de points conjugués par rapport à cinq hyperquadriques linéairement indépendantes ou par rapport à quatre hyperquadriques et à un système-nul. Cela nous permet d'appliquer le théorème dont il a été question plus haut à un cas concret et de construire des modèles projectifs de variétés et de surfaces algébriques qui ne sont peut-être pas dénués d'intérêt.

1. Considérons dans un espace linéaire S_4 à quatre dimensions, quatre polarités linéairement indépendantes :

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma\, a_{ik}x_ix'_k = 0,\ \Sigma\, b_{ik}x_ix'_k = 0,\ \Sigma\, c_{ik}x_ix'_k = 0,\ \Sigma\, d_{ik}x_ix'_k = 0,\\ (a_{ik} = a_{ki}, b_{ik} = b_{ki}, c_{ik} = c_{ki}, d_{ik} = d_{ki};\quad i, k = 0, 1, 2, 3, 4).\end{array}\right\} \quad (1)$$

Nous supposerons que les hyperquadriques fondamentales des quatre polarités précédentes ont en commun seize points distincts.

Les points x, x' satisfaisant aux équations (1) se correspondent dans une transformation birationnelle involutrice T dont les propriétés s'établissent aisément. Aux

(1) Sur les involutions du second ordre appartenant à certaines variétés algébriques à trois dimensions. (*C. R.*, 2e sem., pp. 1169-1170.)

hyperplans de S_4 correspondent des variétés du quatrième ordre passant par la surface d'équations

$$\left\| \begin{matrix} \Sigma\, a_{i0}x_i & \Sigma\, b_{i0}x_i & \Sigma\, c_{i0}x_i & \Sigma\, d_{i0}x_i \\ \Sigma\, a_{i1}x_i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma\, a_{i2}x_i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma\, a_{i3}x_i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma\, a_{i4}x_i & \cdot & \cdot & \Sigma\, d_{i4}x_i \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (2)$$

Cette surface est d'ordre dix. Les éléments d'une même ligne de la matrice (**2**) satisfont à une même relation linéaire

$$y_1 \Sigma\, a_{i0}x_i + y_2 \Sigma\, b_{i0}x_i + y_3 \Sigma\, c_{i0}x_i + y_4 \Sigma\, d_{i0}x_i = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_1 \Sigma\, a_{i4}x_i + y_2 \Sigma\, b_{i4}x_i + y_3 \Sigma\, c_{i4}x_i + y_4 \Sigma\, d_{i4}x_i = 0.$$

L'élimination des x entre ces cinq relations conduit à l'équation

$$\left| \begin{matrix} a_{00}y_1 + b_{00}y_2 + c_{00}y_3 + d_{00}y_4 & \cdot & \cdot & a_{40}y_1 + b_{40}y_2 + c_{40}y_3 + b_{40}y_4 \\ a_{01}y_1 + b_{01}y_2 + c_{01}y_3 + d_{01}y_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{02}y_1 + b_{02}y_2 + c_{02}y_3 + d_{02}y_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{03}y_1 + b_{03}y_2 + c_{03}y_3 + d_{03}y_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{04}y_1 + b_{04}y_2 + c_{04}y_3 + d_{01}y_4 & \cdot & \cdot & a_{44}y_1 + b_{44}y_2 + c_{44}y_3 + d_{44}y_4 \end{matrix} \right| = 0,$$

qui représente une surface du cinquième ordre, birationnellement identique à la surface (**2**). Celle-ci a donc les genres $p_a = p_g = 4$, $p^{(1)} = 6$, $P_2 = 10$, ...

Les hypersurfaces du cinquième ordre, V, passant par la surface (**2**), ont pour équation

$$\left| \begin{matrix} \Sigma\,\lambda_{i0}x_i & \Sigma\,\lambda_{i1}x_i & \Sigma\,\lambda_{i2}x_i & \Sigma\,\lambda_{i3}x_i & \Sigma\,\lambda_{i4}x_i \\ \Sigma\, a_{i0}x_i & \Sigma\, a_{i1}x_i & \cdot & \cdot & \Sigma\, a_{i4}x_i \\ \Sigma\, b_{i0}x_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma\, c_{i0}x_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma\, d_{i0}x_i & \cdot & \cdot & \cdot & \Sigma\, d_{i4}x_i \end{matrix} \right| = 0.$$

Elles forment un système linéaire $|V|$, de dimension vingt, transformé en lui-même par T. Ce système linéaire $|V|$ contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_2 d'ordre deux engendrée par T : l'un, $|V_0|$ correspond au cas où l'on a $\lambda_{ik}=\lambda_{ki}$; l'autre, $|V_1|$, correspond au cas où l'on a $\lambda_{ik}+\lambda_{ki}=0$.

Une hypersurface V_0 est le lieu des couples de points conjugués par rapport aux quatre polarités (1) et à une cinquième polarité

$$\Sigma \lambda_{ik} x_i x'_k = 0 \qquad (\lambda_{ik} = \lambda_{ki}),$$

linéairement indépendante des précédentes. Le système partiel $|V_0|$ a donc la dimension dix.

Une hypersurface V_1 est le lieu des couples des points conjugués par rapport aux polarités (1) et à un système-nul

$$\Sigma \lambda_{ik} x_i x'_k = 0 \qquad (\lambda_{ik} + \lambda_{ki} = 0);$$

le système $|V_1|$ a donc la dimension neuf.

La transformation T possède seize points unis qui sont les points communs aux hyperquadriques fondamentales des polarités (1). Les hypersurfaces V_0 ne passent pas en général par ces points unis, mais les hypersurfaces V_1 passent en général simplement par ces points. Sur une hypersurface V_0, T détermine donc une involution d'ordre deux privée de points unis et, sur une hypersurface V_1, une involution d'ordre deux ayant seize points unis.

Les variétés V ont des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro; elles ont donc les genres $P_g=P_2=P_3=\ldots=1$. Elles ont, d'autre part, l'irrégularité superficielle nulle.

2. Considérons la variété de C. Segre représentant les couples de points *ordonnés* de l'espace S_4. C'est une variété à huit dimensions, d'ordre septante, V_8^{70}, appartenant à un espace linéaire S_{24} à vingt-quatre dimensions [1]. Si nous posons

$$\rho X_{ik} = x_i x'_k \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3, 4),$$

[1] C. SEGRE, Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi. (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1891, pp. 192-204.)

les équations de la variété de Segre V_8^{70} s'obtiendront en exprimant que le déterminant

$$| X_{ik} | \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

est de caractéristique un.

A une section hyperplane de la variété V_8^{70} correspond, dans S_4, l'ensemble des couples de points conjugués dans une réciprocité. Par conséquent, l'ensemble des couples de points de l'involution I_2 engendrée par T dans S_4 est représenté par la section de V_8^{70} par les quatre hyperplans

$$\Sigma\, a_{ik} X_{ik} = 0, \quad \Sigma\, b_{ik} X_{ik} = 0, \quad \Sigma\, c_{ik} X_{ik} = 0, \quad \Sigma\, d_{ik} X_{ik} = 0. \qquad (3)$$

C'est donc une variété V_4^{70} appartenant à un espace linéaire S_{20} à vingt dimensions.

Au couple non ordonné de points x, x' correspondent sur V_8^{70} deux points X, X′ représentant les couples de points ordonnés x, x' et x', x. On a

$$\rho X'_{ik} = X_{ki}$$

et les points X, X′ se correspondent dans une homographie harmonique T′ pour laquelle la variété V_8^{70}, les hyperplans (3) et la variété V_4^{70} sont invariants.

Les axes ponctuels de l'homographie T′ de l'espace S_{24} sont un espace S_9 représenté par les équations

$$X_{ik} + X_{ki} = 0$$

et un espace S_{14}, d'équations

$$X_{ik} - X_{ik} = 0.$$

Le premier de ces espaces appartient aux quatre hyperplans (3). Dans l'espace S_{20} contenant V_4^{70}, T′ donne donc une homographie harmonique ayant comme axes l'espace S_9, que nous désignerons par σ_9, et un espace S_{10}, que nous désignerons par σ_{10}, appartenant à l'espace S_{14}.

Aux hyperplans de S_{24} passant par σ_9 correspondent les polarités de S_4 et aux hyperplans passant par l'axe S_{14} de l'homographie T′ correspondent les systèmes-nuls de S_4.

A un couple de points de l'involution I_2 de S_4 correspondent deux points de V_4^{70} homologues dans l'homographie harmonique T'. Par conséquent, dans l'espace S_{20}, aux sections de V_4^{70} par les hyperplans passant par l'espace σ_9 correspondent les variétés V_0; aux sections de cette variété par les hyperplans contenant σ_{10} correspondent les variétés V_1.

L'espace σ_9 ne rencontre aucune des variétés V_8^{70}, V_4^{70}, mais les espaces S_{14}, σ_{10} rencontrent ces variétés. La variété commune à S_{14} et à V_8^{70} est représentée par les équations obtenues en exprimant que le déterminant symétrique

$$|X_{ik}| \qquad (X_{ik} = X_{ki})$$

est de caractéristique un. Cette variété, à quatre dimensions, est d'ordre seize ([1]). Il en résulte que l'espace σ_{10} rencontre la variété V_4^{70} en seize points, qui correspondent aux points unis de la transformation T.

3. L'homographie harmonique T' engendre sur la variété de Segre V_8^{70} une involution du second ordre dont nous obtiendrons une image en rapportant projectivement, aux hyperplans d'un espace linéaire S_{14}, les hyperplans de l'espace S_{24} passant par σ_9, axe de T'. Cela revient à poser

$$\rho Y_{ik} = X_{ik} + X_{ki},$$

c'est-à-dire

$$\rho Y_{ik} = x_i x'_k + x_k x'_i = \rho Y_{ki}.$$

L'élimination des x, x' entre ces équations conduit aux équations de l'image en question, c'est-à-dire aux équations que l'on obtient en exprimant que le déterminant symétrique

$$|Y_{ik}| \qquad (Y_{ik} = Y_{ik};\ i, k = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{4}$$

([1]) C. Segre, Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diverti gradi estratti da una data matrice. (*Rend. R. Accad. dei Lincei*, 2° sem., 1900, pp. 253-260.)

est de caractéristique deux. Cette variété image est d'ordre trente-cinq et de dimension huit [1]; nous la désignerons par Ω_8^{35}.

Aux hyperplans (3) de S_{24} correspondent dans S_{14} quatre hyperplans ayant en commun un espace S_{10}, coupant la variété Ω_8^{35} suivant une variété Ω_4^{35} image de l'involution engendrée par T' sur V_4^{70} et par suite de l'involution I_2 engendrée par T dans l'espace S_4.

Aux variétés V_0 de S_4 correspondent les sections hyperplanes de Ω_4^{35} dans S_{10}; désignons par Ω_0 ces sections hyperplanes. Nous allons démontrer que, comme les variétés V_0, les variétés Ω_0 ont des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.

Considérons une variété V_0 déterminée, soit $\overline{V}_0$, ne passant par aucun des points unis de T, et soit $\overline{\Omega}_0$ la variété qui lui correspond sur Ω_4^{35}. Désignons par F les surfaces découpées par les variétés V sur $\overline{V}_0$. Le système linéaire $|F|$, ∞^{19}, est transformé en lui-même par T et contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_2 engendrée par T. L'un, $|F_0|$, est formé des surfaces F découpées par les variétés V_0; l'autre, $|F_1|$, des surfaces F découpées par les variétés V_1. Ces deux systèmes ont la même dimension neuf.

La variété $\overline{V}_0$ ayant des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro, $|F|$ est son propre adjoint et, sur une surface F_0 déterminée, soit $\overline{F}_0$, le système canonique est découpé par les surfaces F. Ce système est d'ailleurs complet, puisque $\overline{V}_0$ est d'irrégularité superficielle nulle. Ce système canonique contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_2; l'un, $|C_0|$, est découpé par les surfaces F_0 et est de dimension huit; l'autre, $|C_1|$, est découpé par les surfaces F_1 et a la dimension neuf. Soient $\overline{\Phi}_0$ la surface de $\overline{\Omega}_0$ homologue de la sur-

(1) C. Segre, Gli ordini... (*loc. cit.*).

face $\overline{F}_0$; Γ_0 les courbes qui correspondent sur $\overline{\Phi}_0$ aux courbes C_0. Nous avons démontré (1) que si une surface contient une involution cyclique privée de points unis, le système canonique de la surface image de l'involution a pour homologue, sur la surface support de l'involution, le système de dimension minimum formé de courbes canoniques et composé au moyen de l'involution. Appliquant ce théorème à la surface $\overline{F}_0$, on voit que le système canonique de la surface $\overline{\Phi}_0$ est $|\Gamma_0|$. Or, le système $|\Gamma_0|$ est découpé sur la surface $\overline{\Phi}_0$ par les surfaces Φ_0 qui correspondent, sur Ω_0, aux surfaces F_0 de $\overline{V}_0$. Par conséquent, le système $|\Phi_0|$ est son propre adjoint et $\overline{\Omega}_0$, et par suite les variétés Ω_0, ont des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre nul.

La variété Ω_4^{35} de S_{10} a donc comme sections hyperplanes des variétés Ω_0 de genres $P_g = P_2 = P_3 = \ldots = 1$.

Se donner une variété V_0 revient à se donner une polarité de S_4 linéairement indépendante des polarités (1) et à cette polarité correspond un hyperplan de S_{10}. En tenant compte des équations de ces cinq polarités, on peut exprimer les Y_{ki} en fonctions linéaires de dix quantités homogènes $y_0, y_1, \ldots, y_9$. On en conclut que

Les équations obtenues en exprimant que le déterminant symétrique

$$|\varphi_{ik}(y_0, y_1, \ldots, y_9)| \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

est de caractéristique deux, les fonctions φ_{ik} étant linéaires et homogènes ($\varphi_{ik} = \varphi_{ki}$), représentent une variété algébrique à trois dimensions dont les surfaces canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro.

(1) Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface algébrique régulière. (*Bull. de l'Acad. roy de Belgique*, Cl. des Sc., 1932, pp. 672-679.)

4. Sur une variété V_0, le système $|F|$ découpé par les variétés V est son propre adjoint et est, d'autre part, complet. Une surface F a donc les genres $p_a = p_g = 19$. Le système $|V|$ est de degré 70, égal à l'ordre de la variété V_4^{70}; par suite le genre linéaire des surfaces F est $p^{(1)} = 71$.

Sur une variété Ω_0, le système $|\Phi_0|$ des sections hyperplanes est son propre adjoint; donc les genres d'une surface Φ_0 sont $p_a = p_g = 9$. Comme Ω_0 est d'ordre trente-cinq, le genre linéaire des surfaces Φ_0 est $p^{(1)} = 36$. Ces valeurs des genres de la surface Φ_0 sont d'ailleurs également fournies par les relations que nous avons établies dans nos recherches sur les involutions [1].

Considérons une surface F_0 intersection de deux variétés V_0 et soit Φ_0 la surface qui lui correspond sur Ω_4^{35}. Φ_0 représente une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à F_0. Par conséquent, d'après un théorème que nous avons établi [2], Φ_0 a le diviseur de Severi $\sigma = 2$. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Les équations obtenues en exprimant que le déterminant symétrique

$$| \varphi_{ik}(y_0, y_1, \ldots, y_8) |$$

est de caractéristique deux, les fonctions φ_{ik} *étant linéaires et homogènes* ($\varphi_{ik} = \varphi_{ki}$), *représentent dans un espace* S_8 *une surface algébrique de genres* $p_a = p_g = 9$, $p^{(1)} = 36$, *de diviseur* $\sigma = 2$, *dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques.*

5. Nous allons maintenant nous occuper des points multiples de la variété Ω_4^{35} qui correspondent aux points

(1) Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation. (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914, pp. 289-312.)

(2) Sur certaines surfaces de diviseur supérieur à l'unité. (*Bull. de l'Acad. des Sc. de Cracovie*, 1914, pp. 362-368.)

unis de la transformation T. Pour abréger l'écriture, nous représenterons par Ω cette variété Ω_4^{35}.

Reprenons la variété V_4^{70} de S_{20} et soit P un point commun à cette variété et à l'axe σ_{10} de l'homographie T'. Puisque V_4^{70} est transformée en elle-même par T', l'espace S_4 tangent à cette variété en P coupe l'axe σ_9 de T' suivant un espace S_3. Les hyperplans passant par σ_9 et par P coupent donc V_4^{70} suivant des variétés à trois dimensions ayant un point double en P. Quatre variétés analogues ont donc seize points d'intersection absorbés en P et les variétés en question forment un système linéaire de degré effectif $70 - 16 = 54$. A ce système correspond sur Ω le système des sections faites par les hyperplans passant par le point P' homologue de P; ce système a le degré 27 et par suite le point P' est multiple d'ordre huit pour Ω.

D'autre part, les hyperplans de S_{10} passant par P' correspondent projectivement aux cônes du second ordre de sommet P appartenant à l'espace S_4 tangent à V_4^{70} en P. Par suite, si l'on coupe par un hyperplan ne passant pas par P' le cône tangent à Ω en ce point, on obtient une variété du huitième ordre, à trois dimensions, que l'on peut également obtenir en rapportant projectivement les espaces S_8 de cet hyperplan aux quadriques d'un espace ordinaire.

De tout ceci, on conclut que :

La variété Ω, image de l'involution I_2 engendrée par T *dans l'espace S_4, possède seize points octuples qui sont les points de diramation de la correspondance* (1, 2) *existant entre Ω et l'espace S_4.*

La variété Ω_4^{35}, de S_{14}, possède une variété multiple d'ordre huit, à quatre dimensions, d'ordre seize.

Observons qu'en un point uni de T' on a

$$X_{ik} = X_{ki}, \qquad \rho Y_{ik} = 2X_{ik};$$

par conséquent, pour le point correspondant de Ω_8^{35}, le déterminant (4) est de caractéristique un. On obtient ainsi les équations de la variété V_4^{16} multiple d'ordre huit de la variété Ω_8^{35}.

6. Appelons Ω_1 les variétés qui correspondent, sur Ω, aux variétés V_1 de S_4

Observons qu'un point de diramation de Ω est équivalent, par rapport aux transformations birationnelles à une variété rationnelle à trois dimensions. Désignons par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{16}$ les seize variétés correspondent aux seize points de diramation. D'après la théorie des involutions, nous avons, sur Ω, la relation fonctionnelle

$$2\Omega_0 \equiv 2\Omega_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{16}.$$

Pour obtenir une représentation analytique des variétés Ω_1, observons qu'une hypersurface V_1 de S_4 provient d'un système-nul

$$\Sigma \lambda_{ik}(x_i x'_k - x_k x'_i) = 0 \qquad (i < k).$$

Élevons le premier membre de cette relation au carré et tenons compte des valeurs des Y_{ik}; nous obtenons la relation

$$\Sigma \lambda_{ik}\lambda_{jh}(Y_{ih}Y_{jk} - Y_{ij}Y_{hk}) = 0 \qquad (i, j, k, h = 0, 1, 2, 3, 4). \quad (5)$$

C'est une hyperquadrique de S_{14} passant par la variété V_4^{16} multiple d'ordre huit pour la variété Ω_8^{35}, tangente à cette dernière variété en tout point d'intersection.

La section de la variété (5) par les hyperplans

$$\Sigma a_{ik}Y_{ik} = 0, \quad \Sigma b_{ik}Y_{ik} = 0, \quad \Sigma c_{ik}Y_{ik} = 0, \quad \Sigma d_{ik}Y_{ik} = 0 \quad (6)$$

donne, dans S_{10}, une hyperquadrique passant par les seize points multiples d'ordre huit de Ω et touchant cette dernière variété en tout point d'intersection. Les variétés de contact sont précisément les variétés Ω_1.

Cherchons les genres d'une variété Ω_1. Considérons une variété $\overline{V}_1$ et soit $\overline{\Omega}_1$ la variété correspondante sur Ω. Les variétés V découpent, sur $\overline{V}_1$, un système de surfaces

$|F'|$, ∞^{19}, qui est son propre adjoint et est transformé en lui-même par T. Dans $|F'|$, il existe deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_2 : l'un, $|F'_0|$, est découpé par les variétés V_0 et a la dimension dix; l'autre, $|F'_1|$, est découpé par les hypersurfaces V_1 et a la dimension huit. Considérons une surface $\overline{F}'_0$ et soit $\overline{\Phi}'_0$ la surface qui lui correspond sur $\overline{\Omega}_1$. La surface $\overline{F}'_0$ ne contient pas en général de points unis de l'involution I_2. D'après notre théorème déjà invoqué plus haut [1], au système canonique de $\overline{\Phi}'_0$ correspond sur $\overline{F}'_0$ le système formé de courbes canoniques de cette surface, composé au moyen de l'involution I_2 et ayant la dimension minimum. Or, le système canonique de $\overline{F}'_0$ est découpé sur cette surface par les variétés V; il existe dans ce système deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_2 : l'un, de dimension neuf, est découpé par les variétés V_0; l'autre, de dimension huit, est découpé par les variétés V_1. On en conclut que, sur Ω_1, l'adjoint du système $|\Phi'_0|$ est le système formé par les surfaces Φ'_1 qui correspondent aux surfaces F'_1. Par conséquent, la variété Ω_1 ne possède pas de surface canonique et est de genre géométrique $P_g = 0$.

Considérons maintenant une surface $\overline{F}'_1$ et la surface $\overline{\Phi}_1$ qui lui correspond sur Ω_1. L'involution déterminée par T sur $\overline{F}'_1$ possède seize points unis. Au système canonique de $\overline{\Phi}'_1$ correspond sur $\overline{F}'_1$ celui des systèmes linéaires formés de courbes canoniques, composés au moyen de l'involution I_2, qui n'a pas pour points-base les points unis de cette involution [2]. Il en résulte que l'adjoint de $|\Phi_1'|$ est le système $|\overline{\Phi}'_0|$.

Le biadjoint de $|\Phi'_0|$ est par conséquent $|\Phi'_0|$ lui-même

(1) Sur les involutions cycliques... (*loc. cit.*).

(2) Mémoire sur les surfaces... (*loc. cit.*).

et par suite la variété Ω_1 a une surface bicanonique d'ordre zéro. On en conclut, plus généralement, que

Les variétés Ω_1 sont dépourvues de surface canonique et de surfaces pluricanoniques d'indices impairs, mais elles possèdent des surfaces pluricanoniques d'indices pairs, d'ordre zéro ($P_g = P_3 = P_5 = \ldots = 0$, $P_2 = P_4 = \ldots = 1$).

7. La construction des variétés Ω et Ω_0 peut se présenter sous un aspect légèrement différent.

Les hyperquadriques de S_4 sont en nombre ∞^{14}. Rapportons projectivement les systèmes linéaires ∞^{13} d'hyperquadriques aux hyperplans d'un espace linéaire S_{14} à quatorze dimensions. Cela revient, à une homographie près, à faire correspondre un point Y, de coordonnées $Y_{ik} = Y_{ki}$ (i, $k = 0, 1, 2, 3, 4$) de S_{14}, à l'hyperquadrique d'équation

$$\Sigma\, Y_{ik} x_i x_k = 0.$$

Aux hyperquadriques une fois spécialisées correspondent les points de la variété V_{13}^5 d'équation

$$| Y_{ik} | = 0.$$

Aux hyperquadriques deux fois spécialisées correspondent les points de la variété V_{11}^{15} dont les équations s'obtiennent en écrivant que le déterminant $|Y_{ik}|$ est de caractéristique trois.

Aux hyperquadriques trois fois spécialisées, c'est-à-dire décomposées en deux hyperplans, correspondent les points de la variété V_8^{35} dont les équations s'obtiennent en exprimant que le déterminant $|Y_{ik}|$ est de caractéristique deux. En comparant ces équations à celles qui ont été trouvées plus haut, on voit que

La variété Ω représente les hyperquadriques de S_4 dégénérées en deux hyperplans, appartenant à un système linéaire de dimension dix. Une variété Ω_0 représente les hyperquadriques dégénérées appartenant à un système *linéaire de dimension neuf. Une surface Φ_0 représente les hyperquadriques dégénérées appartenant à un système linéaire de dimension huit.*

Les points multiples d'ordre huit de Ω correspondent à des hyperquadriques dégénérées en deux hyperplans confondus.

8. Reprenons le problème sous son aspect primitif et rapportons projectivement les hypersurfaces V_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_9 à neuf dimensions. Nous obtenons ainsi une variété Ω', à quatre dimensions, qui est une image de l'involution I_2 engendrée dans S_4 par T. On obtient d'ailleurs Ω', à une homographie près, en projetant la variété V_4^{70} à partir de σ_{10} sur σ_9.

Le système $|V|$ est de degré 70; le système $|V_1|$ a comme points-base les seize points unis de I_2; il est donc de degré effectif 54. Il en résulte que la variété Ω' est d'ordre vingt-sept.

Une hypersurface V_1 provenant d'un système-nul de S_4,

$$\Sigma \lambda_{ik} (x_i x'_k - x_k x'_i) = 0 \qquad (i < k;\ i, k = 0, 1, 2, 3, 4),$$

on est conduit à poser, pour obtenir les équations de Ω',

$$\rho Z_{ik} = x_i x'_k - x_k x'_i \qquad (i < k), \tag{7}$$

les Z_{ik} étant les coordonnées de l'espace S_9 contenant Ω'. Et les équations de cette variété s'obtiendront en éliminant les x, x' entre les équations précédentes et les équations (1).

Les quantités Z_{ik} ne sont autres que les coordonnées grassmanniennes de la droite xx' de S_4. La variété Ω' est donc tracée sur la variété grassmannienne W_6^5 représentant dans S_9 les droites de S_4 [1]. En tenant compte de la

[1] BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi.* (Piza, Spoerri, 1907.) Voir pp. 39 et suiv.

signification des points x, x' dans les équations (7), on peut dire que

La variété Ω' *représente les droites joignant les couples de points homologues dans la transformation* T.

On sait que la variété de Grassmann W_6^5 appartient à trois hyperquadriques linéairement indépendantes [1] dont les équations figureront parmi celles de la variété Ω'. Les autres équations de cette variété peuvent s'obtenir de la manière suivante :

Écrivons les équations des hyperquadriques fondamentales des polarités (1) sous la forme

$$a_x^2 = 0, \qquad b_x^2 = 0, \qquad c_x^2 = 0. \qquad d_x^2 = 0; \tag{8}$$

ces hyperquadriques déterminent un système linéaire $|Q|$ de dimension trois. Si x, x' sont deux points d'un groupe de I_2, les ∞^2 hyperquadriques de $|Q|$ passant par x touchent la droite xx' en ce point et par conséquent il y a ∞^1 hyperquadriques Q contenant cette droite. Inversement, si une droite appartient à ∞^1 hyperquadriques de $|Q|$, elle contient un groupe de I_2. La variété Ω' représente donc les droites de S_4 appartenant à ∞^1 hyperquadriques d'un système linéaire triplement infini $|Q|$.

Si une droite appartient à ∞^1 hyperquadriques de $|Q|$, les quatre groupes de deux points découpés sur cette droite par les quatre hyperquadriques (8) appartiennent à une même involution, et réciproquement.

Cela étant, soient y, z deux points de S_4; tout point de la droite yz est donné par $\lambda y + \mu z$. Les couples de points de rencontre de la droite yz avec les hyperquadriques (8) sont donnés par

$$\lambda^2 a_y^2 + 2\lambda\mu a_y a_z + \mu^2 a_z^2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda^2 d_y^2 + 2\lambda\mu d_y d_z + \mu^2 d_z^2 = 0.$$

---

(1) BERTINI, *loc. cit.*

Pour que ces quatre couples appartiennent à une même involution, on doit avoir

$$\left\| \begin{matrix} a_y^2 & a_y a_z & a_z^2 \\ b_y^2 & b_y b_z & b_z^2 \\ c_y^2 & c_y c_z & c_z^2 \\ d_y^2 & d_y d_z & d_z^2 \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (9)$$

Cette matrice possède la propriété de ne pas être altérée lorsque l'on substitue à y, z des quantités $\lambda' y + \mu' z$, $\lambda'' y + \mu'' z$, indépendantes. On peut donc dire qu'elle représente le lieu de droites en question. D'ailleurs, si l'on développe les déterminants obtenus en supprimant une ligne de la matrice (9), on obtient une forme cubique en Z_{ik}; il en résulte que la variété Ω' appartient à quatre hypersurfaces cubiques V_8^3 de S_9.

Observons, en passant, que si l'on fixe le point y et si l'on fait varier le point z dans un hyperplan ne passant pas par y (on peut, par exemple, supposer $y_4 \neq 0$ et $z_4 = 0$), on obtient une courbe d'ordre sept, lieu du point z. Les droites appartenant à ∞^1 hyperquadriques du système $|Q|$, passant par un point, engendrent donc un cône (à deux dimensions) du septième ordre.

De ce qui précède, nous pouvons conclure que

Le lieu des droites de l'espace S_4 *appartenant à un complexe linéaire et à* ∞^1 *hyperquadriques d'un système linéaire triplement infini est une variété algébrique à trois dimensions* Ω_1', *dépourvue de surface canonique et de surfaces pluricanoniques d'indices impairs, mais possédant des surfaces pluricanoniques d'indices pairs, d'ordre zéro.*

Si, dans les équations (9), on suppose $y_4 = 0$, $z_4 = 0$, on obtient les équations de la congruence des rayons principaux de Reye, dont l'image est une surface de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_a = 1$) (1). Les couples de points de I_2 appartenant à un hyperplan, ont donc pour image sur Ω' les points d'une surface de genres zéro et de bigenre un. Il y a donc ∞^4 de ces surfaces sur la variété Ω'. Deux droites de S_4 déterminant un hyperplan, on voit que

La variété Ω' contient ∞^4 surfaces de genres zéro et de bigenre un, une de ces surfaces passant par deux points de la variété.

9. Désignons par P un des points unis de l'involution I_2 dans S_4, c'est-à-dire un des points communs aux hyperquadriques (8). Soit p une droite passant par P; les variétés V_1 tangentes à la droite p au point P forment un système linéaire ∞^8 auquel correspond, dans S_9, une gerbe d'hyperplans dont le sommet P′ appartient à Ω'. Ce point P′ correspond au point infiniment voisin de P sur la droite p, point qui est uni pour l'involution I_2.

Lorsque la droite p varie, le point P′ varie et décrit une variété rationnelle à trois dimensions image, sur la variété Ω', du domaine du premier ordre de P.

Observons d'ailleurs que toute droite p, passant par P, appartient au système de droites d'équations (9).

Trois variétés V_1 ont en commun une courbe ayant un point simple en P; par conséquent un espace S_6 de S_9 coupe la variété image du domaine du premier ordre de P sur Ω' en un seul point. Cette variété est donc un espace linéaire S_3.

La variété Ω' contient seize espaces linéaires à trois dimensions correspondant aux domaines du premier ordre des seize points unis de l'involution I_2 de S_4.

Les variétés Ω_1' contiennent donc chacune seize plans.

10. Occupons-nous enfin des surfaces Φ_1, sections de la variété Ω_1 par des espaces S_7 de S_9.

(1) Voir Fano, Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari. (*Rend. del Circolo Matem. di Palermo*, 1910, t. XXIX, pp. 98-118.)

Deux variétés V_1 ont en commun une surface F_1' sur laquelle T engendre une involution I_2 ayant seize points unis et dont l'image est une surface Φ_1'.

La surface F_1' a les genres $p_a = p_g = 19$, $p^{(1)} = 71$. D'après une formule connue (1), les genres $\pi_a = \pi_g$ *et* $\pi^{(1)}$ de la surface Φ_1' sont donnés par les relations

$$12\,(p_a + 1) = 2.12\,(\pi_a + 1) - 3.16,$$
$$p^{4)} - 1 = 2\,(\pi^{)1)} - 1);$$

d'où $\pi_a = \pi_g = 11$, $\pi^{(1)} = 36$.

Les droites de S_4 *appartenant à deux complexes linéaires et à* ∞^1 *hyperquadriques d'un système linéaire triplement infini forment une variété algébrique à deux dimensions de genres* $p_a = p_g = 11$, $p^{(1)} = 36$.

Quant aux surfaces Φ_0', il résulte de ce que nous avons vu qu'elles ont les genres $p_a = {}_g = 10$, $p^{(1)} = 36$. Les courbes canoniques de ces surfaces en sont les sections hyperplanes.

11. Revenons, pour terminer, aux variétés Ω_0' qui correspondent, sur Ω', aux hypersurfaces V_0.

Une hypersurface V_0 est le lieu des couples de points conjugués par rapport à cinq hyperquadriques linéairement indépendantes, sans points communs,

$$a_x^2 = 0, \qquad b_x^2 = 0, \qquad c_x^2 = 0, \qquad d_x^2 = 0, \qquad f_x^2 = 0.$$

Ces hyperquadriques déterminent un système linéaire $|Q'|$ de dimension quatre. Considérons un couple xx' répondant à la question. Les ∞^3 hyperquadriques Q' passant par le point x sont tangentes à la droite xx' en ce point; il y en a donc ∞^2 qui contiennent cette droite. Inversement, soit p une droite appartenant à ∞^2 hyperquadriques Q'; il existe sur p un seul couple de points conjugués par rapport aux hyperquadriques de $|Q'|$. En reprenant le raisonnement fait plus haut, on voit que le

(1) Mémoire sur les surfaces... (*loc. cit.*).

lieu des droites xx' peut être représenté par les équations

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_y^2 & a_y a_z & a_z^2 \\ b_y^2 & b_y b_z & b_z^2 \\ c_y^2 & c_y c_z & c_z^2 \\ d_y^2 & d_y d_z & d_z^2 \\ f_y^2 & f_y f_z & f_z^2 \end{array} \right\| = 0. \tag{10}$$

On en conclut que

Les droites de S_4 *joignant les couples de points conjugués par rapport à cinq hyperquadriques linéairement indépendantes, sans point commun, forment une variété à trois dimensions possédant des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.*

Observons que par un point de S_4 passe un nombre fini de droites satisfaisant aux équations (10). Pour déterminer ce nombre, supposons le point y fixe et le point z dans un hyperplan ne passant pas par y. Cela revient à supposer $y_4 \neq 0$ et à poser $z_4 = 0$.

Dans l'hyperplan $z_4 = 0$, considérons les z comme les coordonnées courantes.

Les déterminants tirés des deux premières lignes de la matrice (10) s'annulent pour les points d'une conique γ_2. Les déterminants à neuf éléments tirés de la matrice (10) et contenant les deux premières lignes, égalés à zéro, représentent trois surfaces cubiques passant par la conique γ_2. Deux de ces surfaces ont en commun, en dehors de γ_2, une courbe du septième ordre s'appuyant en six points sur la conique γ_2. Par conséquent, les trois surfaces cubiques en question ont quinze points communs en dehors de la conique γ_2. Donc, par un point de S_4 passent quinze droites de la variété représentée par les équations (10).

Liége, le 28 février 1937.