Académie royale de Belgique.

—

EXTRAIT
du *Bulletin de la Classe des Sciences*
5e série — T. XIX — N° 2 — 1933

Koninklijke Belgische Academie.

—

UITTREKSEL
der *Mededeelingen van de Afdeeling Wetenschappen*
5de Reeks — B. XIX — Nr 2 — 1933

Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

L'étude de certaines transformations birationnelles involutives de l'espace [1] nous a conduit à considérer deux variétés algébriques à trois dimensions, l'une d'ordre 16, appartenant à un espace linéaire S_9 à neuf dimensions, l'autre d'ordre dix, appartenant à un espace linéaire S_6 à six dimensions, dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$). Ces deux variétés contiennent chacune un système linéaire de surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Nous nous sommes demandé si l'existence de ce système de surfaces de genres un était une propriété de toute variété dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genre zéro et de bigenre un. La réponse est affirmative et nous établissons précisément le théorème suivant :

Toute variété algébrique normale à trois dimensions, non conique, dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$) *contient un système linéaire de surfaces de genres un* ($p_a = P_4 = 1$) *dont la dimension augmentée d'une unité est égale à la dimension de l'espace ambiant.*

Pour les propriétés des surfaces de genres zéro et de bigenre un qui nous sont nécessaires ici, nous renvoyons aux mémoires de MM. Enriques [2] et Fano [3].

---

(1) Sur une variété algébrique représentant les couples de points inverses de l'espace... (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1930, pp. 907-922).

(2) Sopra le superficie algebriche di bigenere uno (*Mem. della R. Soc. ital. delle Scienze*, 1906).

(3) Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari (*Rend. del Circolo Matem. di Palermo*, 1910, t. XXIX).

1. Soit $V_3^{2\pi-2}$ une variété algébrique à trois dimensions, non conique, d'ordre $2\pi-2$, appartenant à un espace linéaire $S\pi$ à π dimensions, dont les sections hyperplanes sont des surfaces F de genres zéro et de bigenre un ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$). Les espaces $S_{\pi-2}$ à $\pi-2$ dimensions de S_π coupent donc la variété $V_3^{2\pi-2}$ suivant des courbes C de genre π.

Supposons tout d'abord $\pi \geq 5$. Sur une section hyperplane F de $V_3^{2\pi-2}$ il existe un système $|C'|$ de courbes de genre π, $\infty^{\pi-1}$, adjoint au système $|C|$ des courbes découpées sur F par les espaces $S_{\pi-2}$ de l'hyperplan considéré. On sait que $|C|$ est à son tour l'adjoint de $|C'|$ et qu'une courbe C' ne peut contenir une courbe C ou faire partie d'une courbe C. Les courbes C sont d'ordre $2\pi-2$.

Considérons un espace $S_{\pi-2}$ coupant la variété $V_3^{2\pi-2}$ suivant une courbe C irréductible. Soient α cet espace et C_α cette courbe. Fixons arbitrairement $\pi-1$ points $P_1, P_2, \ldots, P_{\pi-1}$ sur la courbe C_α. Sur la surface F_ξ section de $V_3^{2\pi-2}$ par un hyperplan ξ passant par α se trouve une courbe C' et une seule passant par les points $P_1, P_2, \ldots, P_{\pi-1}$ et rencontrant encore C_α en $\pi-1$ autres points fixes qui, avec les $\pi-1$ premiers, forment un groupe canonique de C_α. Lorsque l'hyperplan ξ décrit le faisceau d'axe α, la courbe C' décrit une surface Φ et les ∞^1 courbes C' ainsi obtenues passent par le même groupe canonique de C_α.

Une des ∞^1 courbes C' considérées ne peut contenir C_α, car la surface F la contenant serait de genre géométrique $p_g \geq 1$. Or, les surfaces F peuvent tout au plus acquérir des points multiples et le genre géométrique ne peut augmenter. Il en résulte que la surface Φ ne peut rencontrer C_α en dehors du groupe canonique déterminé par $P_1, P_2, \ldots, P_{\pi-1}$. La surface Φ ne peut par suite avoir que $2\pi-2$ points communs avec l'espace α. Considérons un espace $S_{\pi-2}$ coupant α suivant un espace $S_{\pi-3}$ ne contenant pas un des $2\pi-2$ points précédents. Cet espace $S_{\pi-2}$ appartient à un hyperplan ξ passant par α et rencontre donc la surface Φ en $2\pi-2$ points. Cette surface est par conséquent d'ordre $2\pi-2$.

D'après sa construction, la surface Φ ne peut appartenir à un hyperplan. Cette surface contient un faisceau de sections hyperplanes C' de genre π. D'autre part, une courbe d'ordre $2\pi-2$ de $S_{\pi-1}$ a le genre au plus égal à π. Donc les sections hyperplanes de Φ sont des courbes de genre π. Il en résulte que la surface Φ est de genres un ($p_a=P_4=1$). D'ailleurs, la courbe C_α coupant les courbes C' suivant des groupes canoniques de ces courbes, le système des sections hyperplanes de Φ est son propre adjoint.

La surface Φ appartient à un système linéaire $|\Phi|$ de dimension au moins égale à $\pi-1$, puisque les points $P_1, P_2, \ldots, P_{\pi-1}$ peuvent être choisis sur C_α de $\infty^{\pi-1}$ manières. D'autre part, une surface Φ ne peut contenir la courbe C_α; donc la dimension de $|\Phi|$ ne peut être supérieure à $\pi-1$.

Les surfaces du système Φ découpent sur une surface F contenant C_α et par suite sur toute surface F, le système $|C'|$ adjoint à $|C|$.

Sur une surface Φ, les autres surfaces du système $|\Phi|$ découpent $\infty^{\pi-2}$ courbes Γ. Rapportons projectivement les surfaces Φ aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{\pi-1}$. A la variété $V_3^{2\pi-2}$ correspond birationnellement une variété (simple ou multiple) V_3, à sections hyperplanes de genres un, normale puisque $|\Phi|$ est complet. Cette variété est donc d'ordre $2\pi-2$ et les courbes Γ sont donc de genre $\pi-2$. Le système $|\Phi|$ a le degré $2\pi-6$.

On sait que, sur une surface F, on a

$$|2C| = |2C'|.$$

Par suite, puisque deux surfaces 2F, 2Φ découpent, sur les surfaces F d'un système linéaire ∞^4 au moins, des courbes équivalentes, on a [1]

$$|2F| = |2\Phi|.$$

2. Supposons $\pi = 4$. Les sections hyperplanes de la variété V_3^6 sont des surfaces passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre [2]. La variété possède donc une surface double du sixième ordre, rencontrée par chaque hyperplan suivant six droites formant les arêtes d'un tétraèdre. Cette surface est nécessairement formée des six plans projetant d'un point les arêtes d'un tétraèdre situé dans un espace S_3 ne passant pas par ce point.

Si le centre de projection est le point O_0 (1, 0, 0, 0, 0), la variété V_3^6 a pour équation

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_2(x_2x_3x_4,\ x_3x_4x_1,\ x_4x_1x_2,\ x_1x_2x_3) \\ &\quad + x_1x_2x_3x_4\left[x_0^2 + x_0 f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)\right] = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

où φ_2, f_1, f_2 désignent des polynômes à quatre variables homogènes dont le degré est indiqué par l'indice. Les six plans doubles sont représentés par deux des équations

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Les hypersurfaces cubiques passant par ces six plans doubles sont des cônes de sommet O_0. L'intersection de ces cônes

$$\lambda_0 x_2x_3x_4 + \lambda_1 x_3x_4x_1 + \lambda_2 x_4x_1x_2 + \lambda_3 x_1x_2x_3 = 0 \qquad (2)$$

avec V_3^6 se compose des six plans doubles et de ∞^3 surfaces Φ, d'ordre six.

---

(1) Dans son mémoire « Fondamenti par la geometria sulle varieta algebriche » (*Rend. del Circolo Math. di Palermo*, 2e sem. 1909), M. Severi établit que le genre arithmétique d'une surface formée de deux surfaces de genres arithmétiques p'_a, p''_a, se coupant suivant une courbe de genre π, est $p_a = p'_a + p''_a + \pi$. Cette relation est vérifiée dans le cas actuel. Le genre arithmétique de $|2F|$ est égal à π.

(2) Enriques, *loc. cit.*

Considérons une section hyperplane F de la variété V_3^6. Les cônes cubiques (2) découpent, sur la surface F, les courbes C′ d'ordre six et de genre quatre, adjointes aux sections planes C de cette surface. Il en résulte que les surfaces Φ sont des surfaces de genres un. Elles forment un système linéaire triplement infini, de degré quatre, et les courbes communes à deux de ces surfaces sont de genre deux. On a encore, comme on le voit immédiatement,

$$|2F| = |2\Phi|.$$

3. Supposons enfin $\pi = 3$. La variété V_3^4 est cette fois un espace double à trois dimensions possédant une surface de diramation Δ.

Les sections hyperplanes de la variété V_3^4 sont cette fois des plans doubles F, de genres zéro et de bigenre un. On sait qu'un tel plan double a une courbe de diramation du huitième ordre formée de deux droites m', n' et d'une courbe du sixième ordre ayant un point double en m', n' et deux tacnodes M, N situés l'un sur m', l'autre sur n', les tangentes tacnodales étant m', n' [1]. Les courbes C sont actuellement des droites doubles de genre trois.

La surface de diramation Δ se compose donc du lieu des droites m', n' et du lieu de cette courbe du sixième ordre. Le lieu de m' est un plan μ, le lieu de n' est un plan ν, le lieu de la courbe du sixième ordre une surface Δ_6' ayant comme droite double la droite $\mu\nu$. De plus, le lieu du point M est une droite m du plan μ, double tacnodale pour Δ_6', les tangentes tacnodales appartenant au plan μ. De même, le lieu du point N est une droite n de ν, double tacnodale pour Δ_6', les tangentes tacnodales appartenant à ce plan ν.

Deux cas peuvent se présenter suivant que les droites m, n, sont gauches ou non :

Si les droites m, n sont gauches, soient $x_2 = 0$ l'équation

(1) ENRIQUES, *loc. cit.*

du plan μ ; $x_3 = 0$ celle de ν ; $x_1 = x_2 = 0$ les équations de la droite m ; $x_0 = x_3 = 0$ celles de la droite n. La surface Δ' a pour équation

$$\begin{aligned} & a_0 x_0^4 x_2^2 + a_1 x_0^3 x_1 x_2 x_3 + a_2 x_0^2 x_1^2 x_2 x_3 + a_3 x_0 x_1^3 x_2 x_3 + a_4 x_1^4 x_3^2 \\ & + x_2 x_3 [b_0 x_0^3 x_2 + x_0^2 x_1 \alpha_1(x_2, x_3) + x_0 x_1^2 \beta_1(x_2, x_3) + b_1 x_1^3 x_3] \\ & + x_2 x_3 [x_0^2 x_3 \alpha'_1(x_2, x_3) + x_0 x_1 \gamma_2(x_2, x_3) + x_1^2 x_2 \beta'_1(x_2, x_3)] \\ & + x_2 x_3 [x_0^4 x_2 \alpha_2(x_2, x_3) + x_1 x_3 \beta_2(x_2, x_3) + x_2 x_3 \gamma'_2(x_2 x_3)] = 0, \end{aligned}$$

où α_1, β_1, α'_1, γ_2,... sont des polynômes homogènes en x_2, x_3 dont le degré est indiqué par l'indice.

Si les droites m, n sont concourantes, soit (1, 0, 0, 0) leur point commun, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ les équations des plans μ, ν et $x_1 = 0$ l'équation du plan mn. La surface Δ'_6 a maintenant pour équation

$$\begin{aligned} & x_0^3 x_1 x_2 x_3 + x_0^2 x_2 x_3 [a x_2 x_3 + x_1 \alpha_1(x_1, x_2, x_3)] \\ & + x_0 x_2 x_3 [x_2 x_3 \beta_1(x_1, x_2, x_3) + x_1 \alpha_2(x_1, x_2, x_3)] \\ & + x_1^4 \varphi_2(x_2, x_3) + x_1^3 x_2 x_3 \varphi_1(x_2, x_3) + x_1^2 x_2 x_3 \psi_2(x_2, x_3) \\ & + x_1 x_2^2 x_3^2 \psi_1(x_2, x_3) + x_2^2 x_3^2 \gamma_2(x_2, x_3) = 0, \end{aligned}$$

où α_1, β_1, ... γ_2 sont polynômes dont le degré est indiqué par l'indice.

Dans les deux cas, la surface Δ'_6 est de genres un ($p_a = P_3 = 1$) ; les adjointes sont constituées par les plans μ, ν.

Sur un plan double F, les adjointes des droites doubles sont les coniques doubles passant par le point m' n' (quadruple pour la courbe de diramation) et les points M, N (triples pour la courbe de diramation) ; ces coniques doubles sont de genre trois. Ces coniques sont découpées sur les plans de l'espace par les ∞^2 quadriques passant par les droites m, n et μ ν. Ces quadriques doubles Φ, considérées dans l'espace double V_3^4, ont comme courbe de diramation les droites m, n et la courbe du sixième ordre suivant laquelle elles coupent Δ'_6. Ce sont donc des surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$), formant un réseau.

Une surface $2\,F$ et une surface $2\,\Phi$ découpent des courbes linéairement équivalentes sur les surfaces F d'un réseau; par suite on a

$$|\,2F\,| = |\,2\Phi\,|.$$

Ainsi se trouve établie la proposition énoncée au début de cette note.

Liége, le 22 janvier 1933.

Marcel HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.