EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége.*
N° 4, 1937.

Sur les surfaces algébriques dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

(*Seconde note.*)

Dans cette seconde note (1), nous nous proposons de construire une surface projectivement canonique de l'espace à quatre dimensions, ayant le diviseur $\sigma = 2$.

6. Soit, dans un espace linéaire S_9, V_3^8 la variété obtenue en rapportant projectivement aux hyperplans de cet espace les quadriques d'un espace S_3. Nous dirons que V_3^8 est la variété de Veronese à trois dimensions.

A une surface du quatrième ordre de S_3 correspond, sur V_3^8, la section de cette variété par une hyperquadrique, et réciproquement Cette section est donc une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

Supposons que S_9 soit un hyperplan d'un espace linéaire S_{10} et soit O un point de cet espace n'appartenant pas à cet hyperplan. Soit V_4^8 le cône projetant de O la variété de Veronese V_3^8.

La section de V_4^8 par une hyperquadrique Q_1 de S_{10} est une variété V_3^{16} à sections hyperplanes de genres un. Par conséquent, d'après le premier des théorèmes de M. Enriques cités au début de la première note, la section de V_3^{16} par une hyperquadrique Q_2 est une surface F projectivement canonique, d'ordre 32.

Dans un espace linéaire S_{10}, l'intersection d'un cône projetant une variété de Veronese à trois dimensions et de deux hyperquadriques, est une surface projectivement canonique de genres $p_a = p_g = 11$, $p^{(1)} = 33$.

7. Désignons par x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées des points de S_3 et posons

$$\rho X_{ik} = x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Les équations de la variété de Veronese V_3^8 s'obtiendront en exprimant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{12} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} & X_{34} \\ X_{14} & X_{24} & X_{34} & X_{44} \end{vmatrix}$$

(1) La première note est parue dans ce *Bulletin*, 1937, pp. 92-96.

est de caractéristique un. Dans S_{10}, ces équations représentent le cône V_4^8.

Supposons que dans S_{10}, l'hyperplan S_9 ait pour équation $X_0 = 0$. Les équations de la surface F s'obtiendront en ajoutant aux équations de V_4^8 celles des hyperquadriques Q_1, Q_2.

Considérons dans S_3 l'homographie biaxiale harmonique

$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{x_3'}{-x_3} = \frac{x_4'}{-x_4}.$$

Elle donne lieu, dans S_9, à une homographie harmonique transformant en elle-même la variété V_3^8. Considérons alors, dans S_{10}, l'homographie harmonique H d'équations

$$\frac{X_{11}'}{X_{11}} = \frac{X_{22}'}{X_{22}} = \frac{X_{12}'}{X_{12}} = \frac{X_{33}'}{X_{33}} = \frac{X_{44}'}{X_{44}} = \frac{X_{34}'}{X_{34}} = \rho,$$

$$\frac{X_0'}{X_0} = \frac{X_{13}'}{X_{13}} = \frac{X_{14}'}{X_{14}} = \frac{X_{23}'}{X_{23}} = \frac{X_{24}'}{X_{24}} = -\rho.$$

L'homographie H possède deux axes ponctuels σ_4, σ_5 respectivement d'équations

$$X_{11} = X_{22} = X_{12} = X_{33} = X_{44} = X_{34} = 0,$$

$$X_0 = X_{13} = X_{14} = X_{23} = X_{24} = 0.$$

Le premier ne rencontre pas le cône V_4^8, le second coupe ce cône suivant deux coniques appartenant à V_3^8.

Prenons pour Q_1, Q_2 deux hyperquadriques invariantes pour H mais ne passant pas par les axes σ_4, σ_5 de cette homographie. Nous obtenons une surface F transformée en elle-même par H et sur laquelle celle-ci détermine une involution I_3 d'ordre deux, privée de points unis.

8. Désignons par $|C|$ le système des sections hyperplanes de F (système canonique de la surface), par $|C_1|$ le système découpé sur F par les hyperplans passant par σ_5, par $|C_2|$ celui qui est découpé sur F par les hyperplans passant par σ_4. Les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$ sont composés au moyen de l'involution I_2.

Soient Φ une surface image de l'involution I_2; $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ les systèmes linéaires de courbes correspondant sur Φ aux systèmes $|C_1|$, $|C_2|$ respectivement. On obtiendra des modèles projectifs Φ_1, Φ_2 de Φ en rapportant projectivement soit les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace S_4, soit les courbes C_2 aux hyperplans d'un espace S_5.

Nous avons établi que le système canonique de Φ est celui des systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ qui a la dimension minimum [1]; c'est donc actuellement le système $|\Gamma_1|$. La surface Φ_1 est donc projectivement canonique.

La surface Φ a les genres $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 17$. De plus, comme l'involution I_2 est dépourvue de points unis, le diviseur de Severi de Φ est $\sigma = 2$ [2].

9. Pour obtenir les équations de la surface Φ_1, observons que les équations des hyperquadriques Q_1, Q_2 peuvent s'écrire, en tenant compte des équations du cône V_4^8, sous la forme

$$\begin{aligned} X_{13}^2 X_{23}^2 X_{24}^2 \varphi_2 (X_0, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}) &+ X_{24}^2 X_{12}^2 \alpha_4 (X_{13}, X_{23}) \\ &+ X_{13}^2 X_{34}^2 \alpha'_4 (X_{23}, X_{24}) = 0, \\ X_{13}^2 X_{23}^2 X_{24}^2 \psi_2 (X_0, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}) &+ X_{24}^2 X_{12}^2 \beta_4 (X_{13}, X_{23}) \\ &+ X_{13}^2 X_{34}^2 \beta'_4 (X_{23}, X_{24}) = 0, \end{aligned}$$

où φ_2, ψ_2 sont des formes quadratiques, α_4, α'_4, β_4, β'_4 des formes biquadratiques

L'élimination de X_{12}, X_{34} donne, comme équations de Φ_1,

$$\left.\begin{aligned} & X_{13} X_{24} - X_{14} X_{23} = 0, \\ & \begin{vmatrix} \alpha_4 & \alpha'_4 \\ \beta_4 & \beta'_4 \end{vmatrix}^2 + X_{23}^4 \begin{vmatrix} \varphi_2 & \alpha_4 \\ \psi_2 & \beta_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_2 & \alpha'_4 \\ \psi_2 & \beta'_4 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ces deux hypersurfaces ont en commun la surface Φ_1 et les plans

$$X_{13} = X_{23} = 0, \qquad X_{23} = X_{24} = 0 \tag{2}$$

comptés chacun huit fois.

L'intersection des hypersurfaces (1) *se compose des plans* (2) *comptés chacun huit fois et d'une surface* Φ_1 *projectivement canonique, de genres* $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 17$ *et de diviseur* $\sigma = 2$.

10. On peut aisément obtenir les équations de la surface Φ_2 dans S_5. Cette surface appartient tout d'abord aux deux hyperquadriques

$$X_{12}^2 - X_{11} X_{22} = 0, \qquad X_{34}^2 - X_{33} X_{44} = 0. \tag{3}$$

---

[1] Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface régulière. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1932, pp. 672-679.)

[2] Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité. (*Bull. de l'Acad. des Sc. de Cracovie*, 1914, pp. 362-368.)

Observons ensuite que les équations de Q_1, Q_2 peuvent s'écrire, en tenant compte des équations de V_4^8, sous la forme

$$X_0^2 + X_0\varphi_1(X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}) + \varphi_2(X_{11}, X_{22}, X_{12}, X_{33}, X_{44}, X_{34}) = 0,$$

$$X_0^2 + X_0\psi_1(X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}) + \psi_2(X_{11}, X_{22}, X_{12}, X_{33}, X_{44}, X_{34}) = 0.$$

L'élimination de X_0 entre ces équations donne

$$(\varphi_2\psi_1 - \psi_2\varphi_1)(\varphi_1 - \psi_1) - (\varphi_2 - \psi_2)^2 = 0.$$

φ_1 et ψ_1 se représentent dans cette équation par leurs combinaisons φ_1^2, $\varphi_1\psi_1$, ψ_1^2, que l'on peut écrire, grâce aux équations de V_4^8, en fonction de X_{11}, X_{22}, ..., X_{34} Nous obtenons donc une hypersurface V_5^4 de S_5 qui, avec les équations (3), donne la surface Φ_2, d'ordre seize.

Liége, le 13 avril 1937.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.