Bulletin de la Classe des sciences

Remarques sur les congruences W

Lucien Godeaux

Résumé

Construction de deux suites de Laplace associées dans l'espace à cinq dimensions à une congruence W.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Remarques sur les congruences W

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction de deux suites de Laplace associées dans l'espace à cinq dimensions à une congruence W.

Dans des travaux antérieurs [1] nous avons attaché à une congruence W, de surfaces focales (x) et $(\bar{x})$ quatre suites de Laplace situées dans un espace S_5 à cinq dimensions. Ce sont tout d'abord les suites L et $\bar{\mathrm{L}}$ associées aux surfaces (x) et $(\bar{x})$. Ensuite une suite (J) déterminée par le point J qui représente sur l'hyperquadrique Q de Klein de S_5, la droite j génératrice de la congruence W. Enfin une suite (P) déterminée par le point P qui représente sur Q le complexe linéaire osculateur le long de j à la congruence.

---

[1] *Sur quelques familles de quadriques attachées aux points d'une surface* (Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, 1928, pp. 213-226), La théorie des Surfaces et l'espace réglé (Paris, Hermann, 1934), *Alcune osservazioni sulle congruenze W* (Rendiconti del Seminario Matematico di Torino, 1953-1954, pp. 39-46). *Sur quatre suites de Laplace associées à une congruence W* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1954, pp. 880-885), *Sulle congruenze W* (Rendiconti di Matematica, Roma, 1956, pp. 36-45), *Sur la transformation de Guichard et sur certaines quadriques considérées par M. Demoulin* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1929, pp. 955-958), *Congruenze W e trasformazioni di Guichard* (Rendiconti del Seminario Matematico di Messina, 1957, pp. 1-12), *Familles de quadriques attachées à une congruenze W* (Revue de Mathématiques pures et appliquées de Bucarest, 1956, pp. 93-97), *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé* (Mémoires in-8° de l'Académie roy. de Belgique, 1964, pp. 1-83).

Le point P se trouve sur la droite $U\overline{U}$ joignant les points U, $\overline{U}$ qui représentent les tangentes aux asymptotiques u des surfaces focales et sur la droite $V\overline{V}$ qui représentent les tangentes aux lignes asymptotiques v des surfaces focales. Nous démontrons que les conjugués harmoniques de P par rapport aux couples U, $\overline{U}$ ou V, $\overline{V}$ satisfont à des équations de Laplace. On obtient ainsi deux nouvelles suites de Laplace associées à la congruence W. Notons en passant qu'on peut en déduire des suites de quadriques attachées à la droite j de la congruence. Nous reviendrons sur cette question ultérieurement.

Le point J étant l'intersection des droites UV et $\overline{U}\overline{V}$, nous montrons que les rapports de section de J par rapport à ces points sont égaux.

1. Soient (j) une congruence W, (x) et $(\bar{x})$ ses surfaces focales, u, v leurs asymptotiques. Désignons par U et V les points de l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 qui représentent les tangents xx_u, xx_v en un point x de la surface (x), par $\overline{U}$, $\overline{V}$ les points qui représentent les tangentes $\bar{x}\bar{x}_u$, $\bar{x}\bar{x}_v$ en un point $\bar{x}$ de $(\bar{x})$. Les droites UV, $\overline{U}\overline{V}$ appartiennent à Q et se rencontrent en un point J qui représente la droite j. On sait que le point J décrit un réseau conjugué aux congruences (UV), $(\overline{U}\overline{V})$. Les points U, V et $\overline{U}$, $\overline{V}$ appartiennent à des suites de Laplace

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots \tag{L}$$

et

$$\ldots, \overline{U}^n, \ldots, \overline{U}^1, \overline{U}, \overline{V}, \overline{V}^1, \ldots, \overline{V}^n, \ldots \tag{$\overline{L}$}$$

où chaque point est le transformé de Laplace du précédent dans le sens des u. Ces suites sont autopolaires par rapport à l'hyperquadrique Q.

Le point J appartient à une suite de Laplace inscrite dans les suites L et L,

$$\ldots, J^{-n}, \ldots, J^{-1}, J, J^1, \ldots, J^n, \ldots \tag{1}$$

chaque point étant le transformé de Laplace du précédent dans le sens des v et le point J^{-n} étant l'intersection des droites V^nV^{n+1}, $\overline{V}^n\overline{V}^{n+1}$ et le point J^n, celui des droites U^nU^{n+1}, $\overline{U}^n\overline{U}^{n+1}$.

Désignons par P l'intersection des droites $U\overline{U}$ et $V\overline{V}$, par P^n celui des droites $V^{n-1}\overline{V}^{n-1}$ et $V^n\overline{V}^n$, par P^{-n} celui des droites $U^{n-1}\overline{U}^{n-1}$, $U^n\overline{U}^n$. Le point P est le pôle par rapport à Q de l'hyperplan $J^{-2}J^{-1}JJ^1J^2$, P^n celui de l'hyperplan $J^{n-2}J^{n-1}J^nJ^{n+1}J^{n+2}$ et P^{-n} celui de l'hyperplan $J^{-n+2}J^{-n+1}J^{-n}J^{-n-1}J^{-n-2}$. Ces points appartiennent à une suite de

Laplace

$$\ldots, P^{-n}, \ldots, P^{-1}, P, P^1, \ldots, P^n, \ldots \qquad (2)$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Cette suite est circonscrite aux suites L et $\bar{L}$.

Il importe de remarquer que si, sur un point de l'une des suites L, $\bar{L}$, on effectue une transformation de Laplace dans le sens des u par exemple, les hyperplans polaires subissent une transformation de Laplace dans le sens des v. Ainsi, on passe de U^n à U^{n-1} par une transformation de Laplace dans le sens des u, mais on passe de l'hyperplan polaire $V^{n-2}V^{n-1}V^nV^{n+1}V^{n+2}$ de U^n à celui $V^{n-3}V^{n-2}V^{n-1}$ V^nV^{n+1} en effectuant une transformation de Laplace dans le sens des v.

De même, on passe de P^n à P^{n-1} en effectuant une transformation de Laplace dans le sens des v, mais on passe de l'hyperplan polaire $J^{n-2}J^{n-1}J^nJ^{n+1}J^{n+2}$ de P^n à celui $J^{n-3}J^{n-2}J^{n-1}J^nJ^{n+1}$ de P^{n-1} en effectuant une transformation de Laplace dans le sens des u.

D'une manière générale, *si l'on effectue une transformation de Laplace d'un point de l'une des suites* L, $\bar{L}$, (1), (2) *dans le sens des u (ou des v), tout point conjugué de ce point par rapport à* Q *subit une transformation de Laplace dans le sens des v (ou des u).*

2. Ces points rappelés, désignons par R le conjugué harmonique de P par rapport à V, $\bar{V}$ et par R^{-1} celui de P^{-1} par rapport à U, $\bar{U}$.

L'hyperplan polaire ρ de R par rapport à Q passe par l'intersection des hyperplans polaires de V, $\bar{V}$, c'est-à-dire par l'espace $J^{-1}JJ^1J^2$ et par P. L'hyperplan polaire ρ^{-1} de R^{-1} par rapport à Q passe par les points $J^{-2}J^{-1}JJ^1$ et par P^{-1}.

Effectuons une transformation de Laplace dans le sens des v. A l'espace $J^{-1}JJ^1J^2$ correspond l'espace $J^{-2}J^{-1}JJ^1$ et au point P correspond le point P^{-1}. On voit donc qu'à l'hyperplan ρ correspond l'hyperplan ρ^{-1}. La droite RR_v appartient au plan $U\bar{U}V\bar{V}$ et d'autre part, l'hyperplan polaire de P^{-1} coupe la droite $U\bar{U}$ au point R^{-1}. On en conclut que la droite RR_v passe par le point R^{-1}.

Le même raisonnement montre que si l'on effectue la transformation de Laplace dans le sens des u, on trouve que la droite $R^{-1}R_u^{-1}$ passe par le point R, l'hyperplan ρ^{-1} ayant pour homologue l'hyperplan ρ. Les points R et R^{-1} sont donc les transformés de Laplace l'un de l'autre.

Désignons par R^n le conjugué harmonique de P^n par rapport à

$V^n\overline{V}^n$ et par R^{-n} celui de P^{-n} par rapport à $U^{n-1}\overline{U}^{n-1}$. En raisonnant comme on vient de le faire, on voit qu'il existe une suite de Laplace

$$\ldots, R^{-n}, \ldots, R^{-1}, R, R^1, \ldots, R^n, \ldots \tag{3}$$

dont chaque point est le transformé de Laplace du précédent dans le sens des u. C'est une nouvelle suite de Laplace associée à la congruence (j).

3. Appelons S le conjugué harmonique de P par rapport à $U\overline{U}$ et S^1 celui de P^1 par rapport à $V\overline{V}$. En reprenant le raisonnement fait plus haut, on voit que la droite SS_u passe par S^1 et que la droite $S^1S^1_v$ passe par S. Il en résulte que les points S, S^1 sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

Plus généralement, appelons S^n le conjugué harmonique de P^n par rapport à $V^{n-1}\overline{V}^{n-1}$ et S^{-n} celui de P^{-n} par rapport à $U^n\overline{U}^n$. Ces points font partie d'une suite de Laplace

$$\ldots, S^{-n}, \ldots, S^{-1}, S, S^1, \ldots, S^n, \ldots$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

4. Le point J appartient à la droite UV et est donné par

$$J = \lambda U - \mu V,$$

et on peut choisir le facteur de proportionnalité de λ, μ de telle sorte que l'on ait

$$\lambda_v + 2a\mu = 0, \mu_u + 2b\lambda = 0,$$

c'est-à-dire des quantités qui satisfont aux mêmes équations que V et U [1].

Le point J appartenant également à la droite UV, nous pouvons poser

$$J = \bar{\lambda}\overline{U} - \bar{\mu}\overline{V}.$$

Nous allons chercher les relations qui lient $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ à λ, μ.

Les points V^2, V^1, V, U, U^1, U^2 ne peuvent appartenir à un hyperplan et par conséquent le point P est déterminé par une relation de la forme

[1] Pour éviter d'allonger ce travail, nous renvoyons pour les notations utilisées ici à notre mémoire de 1964, p. 60.

$$P = \xi^2 V^2 + \xi^1 V^1 + \xi V + \eta U + \eta^1 U^1 + \eta^2 U^2,$$

les ξ, η étant déterminés en exprimant que P est le conjugué par rapport à Q des points $J^{-2}, J^{-1}, J, J^1, J^2$.

Rappelons que l'on a

$$J^{-2} = \lambda^1 V^2 - \lambda^2 V^1, \; J^{-1} = \lambda V^1 - \lambda^1 V,$$

$$J^2 = \mu^1 U^2 - \mu^2 U^1, \; J^1 = \mu U^1 - \mu^1 U.$$

Représentons par $\Omega(X,Y) = 0$ la condition pour que les points X, Y soient conjugués par rapport à Q. Nous devons avoir

$$\Omega(P,J^{-2}) = 0, \; \Omega(P, J^{-1}) = 0, \ldots, \Omega(P,J^2) = 0.$$

En posant

$$A = \mu U^2 - (\mu^1 - H\mu) U^1 + (\mu^2 + H\mu^1 + \beta\mu) U,$$

$$B = \lambda V^2 - (\lambda^1 - K\lambda) V^1 + (\lambda^2 + K\lambda^1 + \alpha\lambda) V,$$

où
$$H = (\log . bh_1)_v, \; K = (\log . ak_1)_u,$$

on a
$$P = A - B.$$

5. La droite PV rencontre Q aux points V et $\overline{V}$, par conséquent on a

$$\overline{V} = P - V.$$

Puisque le point $\overline{V}$ appartient à Q, on a

$$\Omega(\overline{V},\overline{V}) = \Omega(P,P) + 2\varphi\Omega(P,V) = 0.$$

Or, on a
$$\Omega(P,V) = 2\lambda\Delta,$$

où $\Delta = | x_{uv} x_u x_v x |$ est une constante.

On a donc
$$4\lambda\varphi\Delta - \Omega(P,P) = 0.$$

Posons $\Omega(P,P) = M\Delta$. On peut écrire sous forme entière

$$\overline{V} = 4\lambda P - MV.$$

On obtient de même

$$\overline{U} = 4\mu P - MU.$$

En éliminant P entre ces relations, on a

$$\lambda\overline{U} - \mu\overline{V} = (\lambda U - \mu V) M = MJ.$$

On a donc
$$\bar{\lambda} = \lambda : M, \; \bar{\mu} = \mu : M.$$

Liège, le 27 mai 1972.