Bulletin de la Classe des sciences

Surfaces algébriques régulières possédant une courbe canonique d'ordre zéro et quatre points doubles coniques

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination d'un groupe de transformations birationnelles en soi d'une surface algébrique de genres p_a — P_4 = 1 certaines étant involutives et d'autres non périodiques.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Surfaces algébriques régulières possédant une courbe canonique d'ordre zéro et quatre points doubles coniques

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination d'un groupe de transformations birationnelles en soi d'une surface algébrique de genres $p_a = P_4 = 1$ certaines étant involutives et d'autres non périodiques.

On sait qu'Humbert et Painlevé ont signalé l'existence de surfaces algébriques contenant un groupe infini discontinu de transformations birationnelles en elles-mêmes (1). Reprenant cette question, Enriques a démontré qu'une surface algébrique possédant cette propriété contenait un faisceau de courbes elliptiques ou possédait une courbe canonique d'ordre zéro ($p_a = P_4 = 1$) (2). Severi a démontré qu'à la base des courbes tracées sur une surface algébrique était liée une forme quadratique à coefficients entiers et que, si la surface est régulière, le groupe de transformations birationnelles de la surface en soi est isomorphe, holoédrique ou mériédrique, au groupe des substitutions linéaires de la forme quadratique (3). Severi applique

(1) Voir les Comptes rendus du 1er sem. 1897 et du 1er sem. 1898.

(2) *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali* (Rendiconti della Accademia dei Lincei, 2e sem. 1906), Memorie Scelte, volume II, pp. 273-278.

(3) *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1910, t. XXX, pp. 265-288).

cette théorie au cas d'une surface du quatrième ordre contenant une sextique de genre deux, exemple déjà considéré par Fano (1). Ce dernier géomètre a également considéré le groupe des transformations birationnelles en soi d'une surface du quatrième ordre contenant deux droites gauches, ou un point double et une droite passant par ce point, ou contenant une courbe de genre deux (2). Nous avons également considéré le cas d'une surface du quatrième ordre contenant une sextique de genre trois (3).

Dans cette note, nous considérons une surface de genres $p_a = P_4 = 1$ contenant quatre points doubles coniques. Une telle surface contient un certain nombre (24 au plus) de transformations birationnelles involutives en soi, le produit de deux quelconques de ces transformations étant non périodique. La surface possède donc un groupe infini discontinu de transformations birationnelles en soi. Nous n'utilisons pas la méthode de Severi, parce que celle-ci exige l'utilisation d'une base minima et que la base que nous utilisons n'est pas de ce type.

1. Soit F une surface régulière, possédant une courbe canonique d'ordre zéro, normale dans un espace S_π à π dimensions. Elle est d'ordre $2\pi - 2$ et ses sections hyperplanes C ont le genre π, nombre que nous supposons supérieur à 2. Supposons que cette surface possède quatre points doubles coniques isolés. Chacun de ces points est équivalent au point de vue des transformations birationnelles à une courbe rationnelle de degré virtuel -2. Nous désignerons par C_1, C_2, C_3, C_4 les courbes rationnelles équivalentes aux quatre points doubles de F.

Le nombre $\pi - 2$ est, d'après le théorème de Bachet, égal à la somme de quatre carrés au plus. Posons donc

$$\pi - 2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2$$

et considérons le système linéaire

$$|\Gamma| = |C - \alpha_1 C_1 - \alpha_2 C_2 - \alpha_3 C_3 - \alpha_4 C_4|.$$

(1) *Sopra alcune superficie del IV ordine rappresentabili sul piano doppio* (Rendicondi del Istituto Lombardo, 1906, pp. 1071-1086).

(2) *Superficie del IV ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali* (Rendiconti della Accademia dei Lincei, 1° sem. 1901, pp. 408-415, 485-491, 2° sem. 1920, pp. 113-118, 175-182, 231-236).

(3) *Sur la surface du quatrième ordre contenant une sextique gauche de genre trois* (Bulletin de l'Académie de Cracovie, 1913, pp. 529-547).

Ce système a le degré, le genre et la dimension égaux à 2. Il existe certainement car comprendre α_1 fois la courbe C_1 équivaut, pour une courbe C, à α_1^2 conditions. Il existe donc $\pi-(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2)=2$ degrés de liberté pour les courbes Γ.

Le système $|\Gamma|$ détermine une transformation birationnelle involutive de T de F en soi, c'est la transformation qui fait se correspondre les points de rencontre de deux courbes Γ.

2. Supposons que la surface F ne soit assujettie à aucune autre condition que de posséder quatre points doubles coniques. Dans ces conditions, les courbes C, C_1, C_2, C_3, C_4 forment une base de la surface F car on a

$$\begin{vmatrix} 2\pi-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 16(2\pi-2)$$

et le déterminant est différent de zéro. Il en résulte que le nombre-base de F est égal à 5 et que cette surface dépend de 15 modules ([1]).

3. Observons que si l'un des nombres α est nul, par exemple si l'on a $\alpha_4 = 0$, les courbes Γ contenant C_4 forment un faisceau de courbes elliptiques de degré zéro et que par conséquent la courbe C_4 est transformée en elle-même par T.

Cela étant, supposons qu'il y ait k des nombres α non nuls et désignons par $C', C'_1, C'_2, C'_3, C'_4$ les courbes que T fait correspondre respectivement aux courbes C, C_1, C_2, C_3, C_4. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \lambda' C' &= \lambda_0 C + \lambda_{01} C_1 + \cdots + \lambda_{0k} C_k, \\ \lambda'_1 C'_1 &= \lambda_1 C + \lambda_{11} C_1 + \cdots + \lambda_{1k} C_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda'_k C'_k &= \lambda_4 C + \lambda_{k1} C_1 + \cdots + \lambda_{4k} C_k, \end{aligned} \tag{1}$$

les λ étant des entiers positifs ou négatifs qu'il s'agit de déterminer.

([1]) SEVERI, *Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero* (Atti del Istituto Veneto, 1908, pp. 249-260).

Rapportons projectivement les courbes Γ aux droites d'un plan σ. La surface F est birationnellement équivalente à un plan double (σ) possédant une courbe de diramation D du sixième ordre, puisque les courbes Γ sont de genre deux.

A une courbe C correspond dans σ une courbe C^* qui correspond également à la courbe C' transformée de C. L'ordre de la courbe C^* est égal au nombre de points communs à la courbe C et à une courbe Γ, c'est-à-dire à $2\pi - 2$. Le genre de la courbe C^* est égal à π.

Considérons un point commun à C et C'. Si ce point est uni pour T, c'est-à-dire s'il appartient à la courbe unie qui correspond à D sur F, il lui correspond dans σ un point de D en lequel la courbe C^* touche D. Si ce point n'est pas uni pour T, il lui correspond un second point commun à C et C' et à ce couple de points correspond un point double de C^*. Réciproquement, à un point double de C^* correspondent deux points communs à C et C' et à un point de contact de C^* avec D correspond un point uni de T commun à C et C'.

D'autre part, la courbe qui correspond sur F à C^* étant décomposée en deux courbes C, C' transformées l'une de l'autre par T, C^* doit toucher D en chaque point de rencontre.

4. La courbe C^* possédant $(2\pi - 3)(\pi - 2) - \pi$ points doubles et touchant D en $3(2\pi - 2)$ points, les courbes C et C' ont $(2\pi - 2)$ $(2\pi - 3)$ points communs. On en conclut que dans la première des formules (1), on a $\lambda_0 = (2\pi - 3)\lambda'$.

De même, à la courbe C_1 et à la courbe C'_1 correspond une courbe C_1^* rationnelle, d'ordre $2\alpha_1$, possédant $(2\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)$ points doubles, touchant D en $6\alpha_1$ points. On en conclut que les courbes C_1 et C'_1 ont $4\alpha_1^2 + 2$ points communs. Par suite, dans les formules (1), on a $\lambda_{01} = -(2\alpha_1^2 + 1)\lambda'_1$.

Les courbes C^* et C'_1 ont $2\alpha_1(2\pi - 2)$ points communs. A ces points correspondent sur F, $4\alpha_4(2\pi - 2)$ points communs aux courbes $C + C'$ et $C_1 + C'_1$. Or C et C_1 ne se rencontrent pas, par suite C' et C_1^* ne se rencontrent pas. Par conséquent C rencontre C'_1 en $2\alpha_4(2\pi - 2)$ points et il en est de même de C' et de C_1. Les formules (1) donnent alors $\lambda_{31} = -\alpha_1(2\pi - 2)\lambda'$, $\lambda_1 = 2\alpha_1\lambda'_1$.

Par des raisonnements analogues, on trouve de même

$$\lambda_{02} = -\alpha_2(2\pi - 2)\lambda', \ldots, \lambda_{0k} = -\alpha_4(2\pi - 2)\lambda',$$

$$\lambda_{12} = -2\alpha_1\alpha_2\lambda'_1, \ldots, \lambda_{1k} = -2\alpha_1\alpha_k\lambda'_1,$$

. . . .

$$\lambda_k = 2\alpha_k\lambda'_k, \lambda_{k1} = -2\alpha_1\alpha_k\lambda'_k, \ldots, \lambda_{kk} = -(2\alpha_k^2 + 1)\lambda'_k.$$

On peut donc écrire

$$\lambda'C' = \lambda'[(2\pi - 3)C - 2(\pi - 1)(\alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_k C_k)],$$

$$\lambda'_1 C'_1 = \lambda'_1[2\alpha_1 C - (2\alpha_1^2 + 1)C_1 - 2\alpha_1\alpha_2 C_2 - \cdots - 2\alpha_1\alpha_k C_k],$$

. . . .

$$\lambda'_k C'_k = \lambda'_k[2\alpha_k C - 2\alpha_1\alpha_k C_1 - \cdots - 2(\alpha_k^2 + 1)C_k].$$

La division sur une surface de genres $p_a = P_4 = 1$ étant une opération univoque (¹), on peut écrire

$$C' = 2(\pi - 1)\Gamma - C, C'_1 = 2\alpha_1\Gamma - C_1, \ldots, C'_k = 2\alpha_k\Gamma - C_k.$$

D'une manière générale, nous écrirons

$$C' = 2(\pi - 1)\Gamma - C, C'_1 = 2\alpha_1\Gamma - C_1, \ldots, C'_4 = 2\alpha_4\Gamma - C_4.$$

Si par exemple α_4 est nul, les formules précédentes donnent $C_4 = -C'_4$ et la courbe C_4 est munie pour T comme on l'avait remarqué plus haut.

5. Supposons que deux au moins des nombres α, soient α_1 et α_2, sont différents et non nuls, et considérons le système

$$|\,\Gamma_1\,| = |\,C - \alpha_2 C_1 - \alpha_1 C_2 - \alpha_3 C_3 - \alpha_4 C_4\,|$$

certainement distinct de $|\,\Gamma\,|$. Il définit à son tour une transformation birationnelle involutive T_1 de F en soi.

La transformation T fait correspondre au système $|\,C\,|$ le système

$$|\,C''\,| = |\,(2\pi - 2)\Gamma - C\,|.$$

Aux courbes rationnelles C_1, C_2, C_3, C_4, T_1 fait correspondre les courbes

$$C''_1 = 2\alpha_2\Gamma_1 - C_1, C''_2 = 2\alpha_1\Gamma_1 - C_2,$$

$$C''_3 = 2\alpha_3\Gamma_1 - C_3, \alpha''_4 C = 2\alpha\Gamma_1 - C_4.$$

(¹) SEVERI, *La base minima pour la totalité des courbes tracées surface algébrique* (Annales de l'École Normale Supérieure, 1908, pp. 449-468).

Au système $|\Gamma_1|$, T fait correspondre le système

$$|\Gamma_1'| = |2[(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 1]\Gamma - \Gamma_1| = |2A\Gamma - \Gamma_1|,$$

en posant $A = (\alpha_4 - \alpha_2)^2 + 1$.

Au système $|\Gamma|$, T_1 fait correspondre le système

$$|\Gamma''| = 2A\Gamma_1 - \Gamma.$$

Appliquons maintenant au système $|C|$ et aux courbes C_1, C_2, C_3, C_4 la transformation TT_1. Nous obtenons

$$|\overline{C}| = |2(\pi - 1)(2A - 1)\Gamma - 2(\pi - 1)\Gamma_1 + C|,$$

$$\overline{C}_1 = 2[2\alpha_2 A - \alpha_1]\Gamma - 2\alpha_2\Gamma_1 + C_1,$$

$$\overline{C}_2 = 2[2\alpha_1 A - \alpha_2]\Gamma - 2\alpha_1\Gamma_1 + C_2,$$

$$\overline{C}_3 = 2\alpha_3 A\Gamma - 2\alpha_3\Gamma_1 + C_3,$$

$$\overline{C}_4 = 2\alpha_4 A\Gamma - 2\alpha_4\Gamma_1 + C_4.$$

Il est clair que si l'on opère plusieurs fois la transformation TT_1 sur $|C|$, on obtiendra un système combinaison linéaire des systèmes $|\Gamma|, |\Gamma_1|$ et $|C|$, c'est-à-dire que la transformation TT_1 ne peut être périodique. Au système $|C|$, $(TT_1)^2$ fait d'ailleurs correspondre le système

$$|(2\pi - 2)[2A(2A - 1)\Gamma_1 - 2A\Gamma] + C|.$$

6. Supposons que les nombres α soient tous différents et qu'aucun ne soit nul. Il y aura autant de systèmes analogues à $|\Gamma|, |\Gamma_1|$ qu'il y a de permutations dans quatre nombres, c'est-à-dire 24. La surface F contient donc 24 transformations birationnelles involutives, le produit de deux d'entre elles n'étant pas périodique.

Supposons maintenant qu'il y ait deux des nombres α égaux, ou bien qu'il y ait un nombre nul, les trois autres étant différents. On trouve encore que F possède 24 transformations birationnelles involutives dont les produits sont des transformations non cycliques.

Supposons qu'il y ait deux nombres α nuls, les deux autres étant différents. La surface F possède six transformations birationnelles involutives dont les produits sont non cycliques.

Si enfin tous les nombres α sont égaux ou s'il y en a trois nuls, la surface F possède cinq ou quatre transformations birationnelles involutives dont les produits sont non cycliques.

7. Supposons que les nombres α_1, α_2, α_3, α_4 sont égaux à un nombre α. On peut alors considérer le système

$$|\Gamma| = |C - \alpha(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)|$$

qui donne lieu à une transformation birationnelle involutive T telle que

$$|C'| = |2(\pi - 1)\Gamma - C|, C_1' = 2\alpha\Gamma - C_1, \ldots, C_4' = 2\alpha\Gamma - C_4.$$

Mais on a

$$\pi - 2 = 4\alpha^2$$

et on peut considérer le système

$$|\Gamma_1| = |C - 2\alpha C_1|$$

qui est un système de degré, genre et dimension égaux à 2. Ce système définit une transformation birationnelle involutive T_1 qui donne

$$|C''| = |(2\pi - 2)\Gamma_1 - C|, C_1'' = 4\alpha\Gamma_1 - C_4,$$

$$C_2'' = -C_2, C_3'' = -C_3, C_4'' = -C_4.$$

T fait correspondre à $|\Gamma_1|$ le système

$$|(2\pi - 2 - 4\alpha^2)\Gamma - \Gamma_1| = |2A'\Gamma - \Gamma_1|$$

où l'on pose $A' = \pi - 1 - 2\alpha^2$.

Aux courbes C, C_1, C_2, C_3, C_4, TT_1 fait correspondre les courbes

$$\overline{C} = (2\pi - 2)[(2A' - 1)\Gamma - \Gamma_1] + C,$$

$$\overline{C}_1 = 2\alpha[(4A' - 1)\Gamma - \Gamma_1] + C_1,$$

$$\overline{C}_2 = -2\alpha\Gamma + C_2,$$

$$\overline{C}_3 = -2\alpha\Gamma + C_3, \overline{C}_4 = -2\alpha\Gamma + C_4.$$

Il est bien évident que la transformation TT_1 ne peut être cyclique.

8. Considérons le système

$$|\Gamma_1| = |C - 2\alpha C_2|$$

qui donne lieu à une transformation T_2 pour laquelle on a

$$C''' = (2\pi - 2)\Gamma_2 - C, C_2''' = 2\alpha\Gamma_2 - C_2,$$

$$C_1''' = -C_1, C_3''' = -C_3, C_4''' = -C_4.$$

Observons que T_1 fait correspondre à $|\Gamma_2|$ le système

$$|(2\pi - 2)\Gamma_1 - \Gamma_2|.$$

La transformation T_1T_2 donne

$$\overline{C} = (2\pi - 2)[(2\pi - 3)\Gamma_1 - \Gamma_2] + C,$$

$$\overline{C}_1 = -4\alpha\Gamma_1 + C_1,$$

$$\overline{C}_2 = 4\alpha[(2\pi - 2)\Gamma_1 - \Gamma_2] + C_2,$$

$$\overline{C}_3 = C_3,\ \overline{C}_4 + C_4.$$

On voit que la transformation T_1T_2 ne peut être cyclique.
On arriverait aux mêmes conclusions si $\pi - 2$ était un carré parfait.

Liège, le 12 février 1972.