Bulletin de la Classe des sciences

Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple (2e note)

Lucien Godeaux

Résumé
Étude des points de diramation de seconde espèce et de seconde catégorie, le cône tangent en un tel point à la surface multiple se décomposant en trois cônes rationnels.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(seconde note)

Résumé. — Étude des points de diramation de seconde espèce et de seconde catégorie, le cône tangent en un tel point à la surface multiple se décomposant en trois cônes rationnels.

Dans cette note [1], nous considérons un point de diramation isolé d'une surface algébrique multiple d'ordre premier p dont le cône tangent se décompose en trois cônes rationnels. Cette surface représente une involution cyclique d'ordre p appartenant à une surface algébrique F. Au point uni de cette involution auquel correspond le point de diramation considéré, sont attachés deux entiers α, β et si l'on considère les solutions λ, μ des congruences équivalentes

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \; \mu + \beta\lambda \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\, p)$$

telles que $\lambda + \mu$ soit inférieur à p, la solution donnant la plus petite valeur de $\lambda + \mu$ est telle que

$$\lambda + \alpha\mu = hp, \; \mu + \beta\lambda = p \qquad (h > 1)$$

Nous étudions cette question par une autre voie que celle que nous avons exposée dans notre ouvrage sur les involutions [2] et nous

---

[1] La première note est parue dans le Bulletin de l'Académie, 1972, pp. 6-22.

[2] *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Éditions Cremonese, 1963).

confrontons ensuite les deux solutions. Nous ne poussons pas la question jusqu'au bout car cela aurait entraîné un fouillis de notations inextricable et les raisonnements eussent été la répétition de ceux que nous avons faits au début. L'application aux cas particuliers, où p, α et β ont des valeurs numériques données peut être poussée en utilisant les raisonnements que nous avons faits au début.

Les notations générales que nous avons adoptées dans cette seconde note sont semblables à celles de notre première note.

1. Comme dans notre première note, nous partons d'une surface algébrique normale F appartenant à un espace S_r à r dimensions, transformée en soi par une homographie H dont la période est un nombre premier $p = 2\nu + 1$ et possédant p axes ponctuels dont un seul, σ_0, rencontre F, en un nombre fini de points. Nous désignerons par r_0 la dimension de σ_0 et, r et par suite r_0 étant choisis suffisamment grands, nous désignerons par Φ la surface normale dont les sections hyperplanes Γ correspondent aux sections C de F par les hyperplans unis pour H ne passant pas par σ_0. Cette surface Φ est l'image de l'involution I d'ordre p engendrée sur F par l'homographie H. Cette involution possède un nombre fini de points unis, les points de rencontre de F avec l'espace σ_0.

Soit O un point uni de seconde espèce de I, α, β les entiers positifs qui lui sont attachés, λ_1, μ_1 la solution en nombres entiers positifs des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \ \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod.}\, p)$$

telle que la somme $\lambda_1 + \mu_1$ soit minimum. Nous supposerons que O est un point uni de seconde catégorie et que l'on a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = hp, \ \mu_1 + \beta\lambda_1 = p, \qquad (h > 1).$$

Posons

$$p = a\beta + b, \qquad (b < \beta).$$

Les nombres $\lambda = a$, $\mu = b$ sont une solution des congruences (1). Les autres solutions des congruences (1) dont la somme est égale à p sont de la forme

$$\lambda = a - x, \ \mu = b + \beta x,$$

et la somme de ces nombres est supérieure à $a + b$, car $\beta > 1$. Il en résulte que l'on a

$$\lambda_1 = a, \ \mu_1 = b.$$

Posons maintenant

$$p = a'\alpha + b', \qquad (b' < \alpha).$$

$\lambda = b'$, $\mu = a'$ est une solution des congruences (1) mais on ne peut avoir $\lambda_1 = b'$, $\mu_1 = a'$, car alors $b' + \alpha a'$ serait égal à hp.

On a donc

$$a + \alpha b = hp.$$

2. Appelons comme dans notre première note C^1 les courbes C passant par O et Γ^1 les courbes qui leur correspondent sur Φ. Les courbes Γ^1 sont découpées par les hyperplans passant par le point de diramation O' homologue du point uni O. Les courbes C^1 ont la multiplicité $a + b$ en O et passent a fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha,2)$, ..., $(\alpha, \beta - 1)$, b fois par le point $(\beta,1)$.

La somme des multiplicités des courbes C^1 en O, $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, ..., $(\beta,\alpha - 1)$ doit être égale à p et nous sommes conduit à supposer, d'après les résultats obtenus dans notre ouvrage cité au début, que les courbes C^1 passent b fois par les points $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, ..., (β,x), y fois par le point $(\beta, x + 1)$, μ'_1 fois par les points $(\beta,x + 2)$, ..., $(\beta, \alpha - 1)$, un certain nombre de fois par le point $(\beta, x + 1, 1)$ et par une suite de points infiniment voisins successifs se terminant par un point multiple d'un certain ordre m. On a $b > y > \mu'_1$ et on doit avoir

$$a + b + xb + y + (\alpha - 2 - x)\mu'_1 = p.$$

De plus m est le plus grand commun diviseur des nombre $b - y$ et $y - \mu'_1$.

Désignons par Φ_1 la surface projection de Φ à partie de O' sur un hyperplan de l'espace ambiant, les sections hyperplanes de cette surface étant donc les courbes Γ^1.

Aux domaines des points $(\alpha,\beta - 1)$ et $(\beta,\alpha - 1)$ correspondent respectivement sur Φ_1 des courbes rationnelles normales σ_α, σ_β. Au domaine du point commun à toutes les courbes C^1 et multiple d'ordre m pour ces courbes correspond une courbe rationnelle normale τ, d'ordre m. Si l'on écrit ces courbes dans l'ordre σ_α, τ, τ_β, chacune d'elles rencontre la précédente et la suivante en un point mais ne rencontre pas les autres. On a la relation fonctionnelle

$$\Gamma \equiv \Gamma^1 + \sigma_\alpha + \tau + \sigma_\beta$$

et les courbes σ_α, τ, σ_β ont respectivement les degrés virtuel $-(a+1)$, $-(m+2)$, $-(\mu'_1+1)$. Ces courbes sont respectivement d'ordres a,m,μ'_1.

3. Observons que les courbes C^2 doivent passer $\lambda_2+\mu_2>a+b$ fois par O et comme la somme des multiplicités de ces courbes en O, $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,\beta-1)$ doit être égale à p, ces courbes passent au plus $a-1$ fois par le point $(\alpha,\beta-1)$.

Parmi les solutions des congruences (1) se trouvent les nombres

$$\lambda_k = a-1,\ \mu_k = b+\beta.$$

Appelons $| C^k |$ le système correspondant. Les courbes C^k passent $a+b+\beta-1$ fois par O et $a-1$ fois par les points $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,\beta-1)$, car on a

$$a+b+\beta-1+(\beta-1)(a-1)=p.$$

Sur la surface Φ_1, les courbes Γ^2 homologues des courbes C^2 sont découpées par les hyperplans passant par un point fixe P′ de σ_α et qui rencontrent encore σ_α en $a-1$ points variables au plus. Les courbes Γ^k homologues des courbes C^k sont découpées par des hyperplans passant par P′, car ces courbes sont des courbes Γ^2 particulières. Mais ces hyperplans rencontrent encore la courbe σ_α en $a-1$ points variables. On en conclut que les courbes $\Gamma^2, \Gamma^3, \ldots, \Gamma^k$ sont découpées par des hyperplans passant par P′ et rencontrent encore σ_α en $a-1$ points variables. Les courbes C^2 passent $a-1$ fois par le point $(\alpha,\beta-1)$.

4. Les nombres $\lambda=b'$, $\mu=a'$ étant une solution des congruences (1), appelons $| C^* |$ le système qui leur correspond. Ses courbes passent $a'+b'$ fois par O et a' fois par les points $(\beta,1),\ldots,(\beta,\alpha-1)$. Si nous désignons par P le point multiple d'ordre m pour les courbes C^1, il en résulte que les courbes C^* ne passent plus par P.

Reprenons l'équation

$$a+b+xb+y+(\alpha-2-x)\mu'_1=p$$

et rappelons que l'on détermine le point P en cherchant le plus grand commun diviseur de $b-y$ et $y-\mu'_1$, ce plus grand commun diviseur étant la multiplicité m de P. Nous poserons donc

$$b-y=\mathrm{H}m,\ y-\mu'_1=\mathrm{H}'m,$$

H et H′ étant des entiers positifs. On en déduit

$$b = \mu_1' + (\mathrm{H} + \mathrm{H}')m, y = \mu_1' + \mathrm{H}'m$$

et on a

$$a + (\mathrm{H} + \mathrm{H}')(x + 1) + \mathrm{H}'m + \alpha\mu_1' = p.$$

Si les courbes du système $| \mathrm{C}' |$ correspondant à la solution λ', μ' ne passent plus que $m - 1$ fois par le point P, on a

$$\mu' = \mu_1' + (\mathrm{H} + \mathrm{H}')(m - 1)$$

et ses courbes passent $y' = \mu_1' + \mathrm{H}'(m - 1)$ fois par le point $(\beta,x+1)$. On a donc

$$\lambda' + (x + 1)(\mathrm{H} + \mathrm{H}')(m - 1) + \mathrm{H}'(m - 1) + \alpha\mu_1' = p$$

et

$$\lambda' = a + (x + 1)(\mathrm{H} + \mathrm{H}') + \mathrm{H}'.$$

Plus généralement, si les courbes $\mathrm{C}^{(i)}$ ne passent plus que $m - i$ fois par P, elles correspondent à la solution

$$\mu^{(i)} = \mu_1' + (\mathrm{H} + \mathrm{H}')(m - i), \ y^{(i)} = \mu_1' + \mathrm{H}'(m - i),$$

$$\lambda^{(i)} = a + (x + 1)(\mathrm{H} + \mathrm{H}')i + \mathrm{H}'i$$

et on a

$$\lambda^{(i)} + (x + 1)(\mathrm{H} + \mathrm{H}')(m - i) + \mathrm{H}'(m - i) + \alpha\mu_1' = p.$$

En particulier, si $i = m$, on a

$$\lambda^{(m)} + \alpha\mu_1' = p = \alpha a' + b'.$$

Les courbes $\mathrm{C}^{(m)}$ passent donc μ_1' fois par $(\beta,1), \ldots, (\beta,\alpha-1)$ et doivent coïncider avec les courbes C*, c'est-à-dire que l'on a

$$\lambda^{(m)} = a + (x + 1)(\mathrm{H} + \mathrm{H}')m + \mathrm{H}'m = b', \mu_1' = a'.$$

Il en résulte que m divise $b' - a$ et, comme on l'a vu plus haut, $b - a'$.

5. Reprenons le système $| \mathrm{C}^k |$ qui correspond à la solution $\lambda_k = a - 1$, $\mu_k = b + \beta$. Ce système ne peut coïncider avec l'un des systèmes rencontrés au numéro précédent, car on aurait

$$(x + 1)(\mathrm{H} + \mathrm{H}')i + \mathrm{H}'i = -1,$$

ce qui est absurde. On en conclut

$$a' + b' < a + b + \beta - 1.$$

Par conséquent les courbes $C', C'', \ldots, C^{(m)}$ passent toutes $a - 1$ fois par le point $(\alpha, \beta - 1)$. Les courbes homologues sur la surface Φ_1: $\Gamma', \Gamma'', \ldots, \Gamma^{(m)}$ sont donc découpées par des hyperplans passant par le point P'.

Supposons que le point P' n'appartienne pas à la courbe τ. Alors les courbes Γ^2 rencontrent la courbe σ_β en a' points et la courbe τ en m points. Il en résulte que les courbes C^2 passent a' fois par le point $(\beta.\alpha - 1)$ et m fois par le point P. Mais alors les courbes C^2 se comportent aux points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, \alpha - 1)$ comme les courbes C^1 et une courbe $C^1 - C^2$, d'ordre zéro, passe par les points $(\alpha, 1), \ldots$, ce qui est absurde. On en conclut que le point P' est l'intersection des courbes σ_α et τ. Les courbes C^2 ne passent plus que $m - 1$ fois par P et coïncident avec les courbes C'. On a donc

$$\lambda_2 = a + (x + 1)(H + H') + H',$$

$$\mu_2 = a' + (H + H')(m - 1).$$

Nous poserons $K = (x + 1)(H + H') + H'$ de sorte que l'on aura $\lambda_2 = a + K$. Observons que l'on a d'ailleurs $b' - a = Km$, d'où $b' > a$, car H et H' sont supérieurs à l'unité.

Appelons, comme dans la première note, *suite* A la suite des points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \beta - 1)$. Nous dirons qu'une suite de points en nombre fini, infiniment voisins successifs d'un point de la *suite* A, se détache de cette suite, ces points étant unis de seconde espèce pour l'involution I, sauf le dernier qui est uni de première espèce. Nous utiliserons la même expression pour la *suite* B. Ainsi, la suite de points $(\beta, x + 1, 1), \ldots$, P se détache de la *suite* B au point $(\beta, x + 1)$.

Appelons suite $\mathscr{C}$ la suite des systèmes $|C|, |C^1|, |C^2|, \ldots$

Les systèmes $|C'|, C'', \ldots, |C^{(m)}|$ appartiennent à la suite $\mathscr{C}$, mais il peut exister un système $|C^j|$ qui précède ou suit immédiatement le système $|C^{(i)}|$ par exemple et dont les courbes passent, comme les courbes $C^{(i)}$, $m - i$ fois par le point P. Dans ces conditions, les courbes C^j et $C^{(i)}$ ont la même multiplicité aux points $(\beta, x), (\beta, x + 1), \ldots, (\beta, \alpha - 1), (\beta, x + 1, 1), \ldots$, P, mais la multiplicité des courbes C^j au point $(\beta, 1)$ est supérieure à celle des courbes $C^{(i)}$ au même point. Il en résulte qu'il existe entre le point $(\beta, 1)$ et le point (β, x) un point d'où se détache une suite de points se terminant par un point uni de première espèce.

Observons que les courbes $\Gamma^{(i)}$ qui correspondent sur Φ_1 aux courbes $C^{(i)}$ sont découpées par les hyperplans passant par P' et ayant en ce point, avec la courbe τ, un contact d'ordre $i - 1$.

6. Nous avons

$$\lambda^{(i)} = a + Ki, \quad \mu^{(i)} = b - (H + H')i.$$

Nous devons avoir

$$\lambda^{(i)} + \alpha\mu^{(i)}, \quad \mu^{(i)} + \beta\lambda^{(i)}$$

multiples de p. La première nous conduit à la condition que l'expression

$$(\alpha - x - 1)(H + H') - H'$$

doit être multiple de p. La seconde que l'expression

$$(H + H')(\beta x + \beta - 1) + \beta H' = \beta K - (H + H')$$

doit également être multiple de p.

7. Les points $(\beta, x+1, 1)$, ..., P ont des multiplicités ayant m comme facteur. Par conséquent, dans le nombre des intersections des courbes C^2, ces points interviennent pour un certain nombre X multiple de m^2. Or le degré effectif du système $| C^2 |$ donne

$$(a+b)^2 + (\beta - 1)a^2 + xb^2 + y^2 + (\alpha - 2 - x)a'^2 + X = p(a + a' + m).$$

En tenant compte que l'on a

$$b = a' + (H + H')m, \quad y = a' + H'm, \quad a^2 = a(p - b), \quad a'^2 = a'(p - b'),$$

on trouve

$$ab - a'b' + 2a'mK + [(x+1)(H+H')^2 + H'^2]m^2 + X = pm.$$

On a

$$ab - a'b' = a(H + H')m - a'Km,$$

et par conséquent en posant

$$p - a'K - a(H + H') = Am,$$

on a

$$X = [A - (x + 1)(H - H')^2 - H'^2]m^2.$$

7. La droite O'P' est double pour le cône tangent en O' à la surface Φ, donc le point infiniment voisin de O' est au plus double pour la surface Φ, c'est-à-dire que le point P' est au plus double pour la surface Φ_1.

D'autre part, il ne peut y avoir une suite de points unis qui se détache de la *suite* B en dehors de celle qui aboutit au point P, tandis que μ_2 étant supérieur à $a - 1$, il y a certainement des suites de points unis qui se détachent de la *suite* A.

Examinons les différents cas qui peuvent se présenter:

Si le point P' est simple pour la surface Φ_1, il existe une suite de points unis se détachant de la *suite* A et se terminant par un point uni de première espèce, simple pour les courbes C^2. Il correspond à son domaine sur la surface Φ_2 une droite exceptionnelle, de degré virtuel -1.

Si le point P' est double conique pour la surface Φ_1, le cône tangent en P' contient les tangentes aux courbes σ_α et τ. Il se détache de la *suite* A une suite de points unis se terminant par un point uni de première espèce double pour les courbes C^2. Au domaine de ce point correspond sur la surface Φ_2 une conique ρ rencontrant en un point chacune des courbes σ_α, τ, ces deux courbes ne se rencontrant plus. On a, sur la surface Φ_2,

$$\Gamma = \Gamma^2 + \sigma_\beta + \tau + 2\rho + \sigma_\alpha$$

et la conique ρ a le degré virtuel -2.

Au point infiniment voisin de P' sur la courbe τ correspond sur la surface Φ_2 le point commun à la courbe τ et à la conique ρ.

8. Supposons maintenant que le point P' soit double biplanaire pour la surface Φ_1. Il y a deux suites de points unis qui se détachent de la *suite* A et se terminant par des points simples pour les courbes C^2. Aux domaines de ces points correspondent sur Φ_2 deux droites ρ_1, ρ_2 se rencontrant en un point. L'une d'elles, ρ_1, rencontre σ_α et l'autre, ρ_2, rencontre τ.

Deux cas peuvent se présenter suivant que la droite commune aux plans P'ρ_1 et P'ρ_2 est tangente à la courbe τ ou non.

Examinons le second cas. Le plan P'ρ_2 touche la courbe τ en P' et le point infiniment voisin de P' sur τ se projette suivant le point commun à τ et à ρ sur la surface Φ_3. Sur cette surface, il correspond à ρ_1 une droite.

Sur la surface Φ_2 nous avons

$$\Gamma \equiv \Gamma^2 + \sigma_\beta + \tau + 2(\rho_2 + \rho_1) + \sigma_\alpha.$$

Les droites ρ_1, ρ_2 ont le degré virtuel -2.

Envisageons maintenant le premier cas. Le point P_1 infiniment voisin de P′ sur la courbe τ peut être simple, ou double conique, ou double biplanaire pour la surface Φ_2. S'il est simple, il lui correspond sur la surface Φ_3 une droite exceptionnelle, qui représente le domaine d'un point simple pour les courbes C^3, terminant une suite de points unis se détachant soit de la *suite* A, soit de la *suite* B, si le système $|C^3|$ ne coïncide pas avec le système $|C''|$.

Supposons que le point P_1 soit double conique pour la surface Φ_2. Il lui correspond sur Φ_3 une conique ρ et on a sur cette surface

$$\Gamma \equiv \Gamma^3 + \sigma_\beta + \tau + 2\rho_2 + 3\rho + 2\rho_1 + \sigma_\alpha.$$

La conique ρ est de degré virtuel -2. Sur la surface Φ_3, la courbe τ est d'ordre $m - 1$ et les systèmes $|C^3|$ 3t $|C''|$ ne coïncident pas. Il en résulte que la conique ρ représente le domaine d'un point double pour les courbes C^3 terminant une suite de points unis se détachant de la *suite* B en un point compris entre $(\beta,1)$ et (β,x).

Si le point P'_1 est double biplanaire pour Φ_2, il existe sur la surface Φ_3 deux droites ρ_3, ρ_4 de degré virtuel -2 et on a

$$\Gamma \equiv \Gamma^3 + \sigma_\beta + \tau + 2\rho_2 + 3(\rho_3 + \rho_4) + 2\rho_1 + \sigma_\alpha.$$

Sur la surface Φ_3, la courbe τ est d'ordre $m - 1$ de sorte que le système $|C^3|$ est distinct du système $|C''|$. Il y a donc une suite de points unis qui se détache de la *suite* B en un point situé entre $(\beta,1)$ et (β,x), se terminant par un point simple pour les courbes C^3 et dont l'entourage est représenté par une des droites ρ_3, ρ_4.

Ce raisonnement peut être poursuivi en examinant les cas où le point commun aux droites ρ_3, ρ_4 est simple, double conique ou double biplanaire pour Φ_3.

9. Avant d'aller plus loin, nous allons confronter la méthode exposée ici et celle que nous avons suivie dans l'exposé cité plus haut, en tenant compte d'une légère différence de notations.

Nous avons posé $p = a'\alpha + b'$. Déterminons un entier r satisfaisant à la double inégalité

$$rb' < \alpha < (r + 1)b',$$

puis un entier m tel que l'on ait

$$m'(\alpha - rb') < b' < (m' + 1)(\alpha - rb').$$

Dans ces conditions, nous avons sur la surface Φ_1 une courbe σ_α d'ordre $b' - m'(\alpha - rb')$, une courbe τ d'ordre m' et une courbe σ_β d'ordre a'. Ces courbes étant identiques à celles que nous avons rencontrées, nous avons

$$m' = m, \; b' - m(\alpha - rb') = a.$$

Comme nous avons posé plus haut $b' - a = \mathrm{K}m$, nous avons

$$\mathrm{K} = (x + 1)(\mathrm{H} + \mathrm{H}') + \mathrm{H}' = \alpha - rb'.$$

On a de plus

$$\lambda_1 = b' - m(\alpha - rb') = a, \; \mu_1 = a' + (ra' + 1)m = b.$$

Nous avons $\lambda_1 + \alpha\mu_1 = hp$, d'où l'on déduit

$$h = rm + 1.$$

D'autre part, on a $\mu_1 + \beta\lambda_1 = p$, d'où l'on déduit

$$m(\alpha\beta - 1) = (mr + 1)(\alpha' + \beta b') = p.$$

$\alpha\beta - 1$ est multiple du nombre premier p et de plus, $a' + \beta b'$ est multiple de p. On en déduit que le nombre

$$a' + \beta b' - 1$$

est multiple de m.

10. Sur la surface Φ_1, les courbes σ_β et τ se rencontrent en un point, simple pour chacune des courbes, que nous désignerons par P″. Appelons $\bar{\Gamma}'$ les sections de Φ_1 par les hyperplans passant par P″. Il leur correspond sur F des courbes que nous désignerons par $\overline{\mathrm{C}}'$ qui forment un système appartenant à l'involution I et qui a la même dimension que le système $|\,\mathrm{C}'\,|$.

Les courbes $\overline{\mathrm{C}}'$ passent $a' - 1$ fois par le point $(\beta, \alpha - 1)$, et $m - 1$ fois par le point P mais a fois par le point $(\alpha, \beta - 1)$. Elles sont donc distinctes des courbes C′.

Pour obtenir la multiplicité de P pour les courbes C′, nous avons dû faire les mêmes opérations que pour chercher le plus grand commun diviseur de $b - y = \mathrm{H}m$ et de $y - a, = \mathrm{H}'m$. Ce plus grand commun diviseur était par hypothèse m, donc la recherche des points unis communs aux courbes C′ revenait à chercher le plus grand commun diviseur de H et de H′. P étant multiple d'ordre m pour les courbes C′, *les nombres* H *et* H′ *sont premiers entre eux.*

Le même raisonnement montre que les courbes $\overline{\mathrm{C}}'$ passent $\bar{\mu}'$ fois par les points $(\beta,1), \ldots, (\beta,x)$, y' fois par $(\beta,x+1)$, $a'-1$ fois par les points $(\beta,x+1), \ldots, (\beta,\alpha-1)$, $m-1$ fois par P, les nombres $\bar{\mu}'-y'$, $y'-a'$ ont le plus grand commun diviseur $m-1$. On doit donc avoir

$$\bar{\mu}' - y' = \mathrm{H}(m-1), \quad y' - a' = \mathrm{H}'(m-1),$$

c'est-à-dire

$$\bar{\mu}' = (\mathrm{H}+\mathrm{H}')(m-1) + a' - 1, \quad y' = \mathrm{H}'(m-1) + a' - 1.$$

ou encore

$$\bar{\mu}' = \mu' - (\mathrm{H}+\mathrm{H}'+1).$$

Les courbes $\overline{\mathrm{C}}'$ forment donc un système $|\overline{\mathrm{C}}'|$ distincte de $|\mathrm{C}'|$ bien qu'ayant la même dimension. Les courbes $\overline{\mathrm{C}}'$ ont d'ailleurs une multiplicité distincte en O. Le nombre $\bar{\mu}'$ et la multiplicité $\bar{\lambda}'$ des courbes $\overline{\mathrm{C}}'$ au point $(\alpha,1)$, ne peuvent donc pas former une solution des congruences (1).

En reprenant une analyse analogue à celle faite plus haut, on sera conduit à considérer les courbes $\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}', \ldots, \bar{\Gamma}^*$ découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par P″, touchant la courbe τ en P″, ou enfin ayant un contact d'ordre $m-1$ avec τ en P″. Les courbes qui leur correspondent sur F passent $m-1$ fois, $m-2$ fois, ..., 0 fois par le point P.

On pourrait supposer que le système des courbes $\Gamma^{(m)}$ contenant la courbe τ et celui des courbes $\bar{\Gamma}^{(m)}$ satisfaisant à la même propriété coïncident. Mais comme on l'a vu, il peut y avoir des systèmes de courbes de $\mathscr{C}$ qui viennent s'intercaler dans la série des systèmes $|\mathrm{C}'|, |\mathrm{C}''|, \ldots, |\mathrm{C}^{(m)}|$, de sorte que les systèmes en question peuvent ne pas avoir la même dimension.

Mais ces systèmes peuvent coïncider dans certains cas en un système qui est alors formé des sections de la surface Φ_1 par les hyperplans contenant la courbe τ. Les courbes de ce système rencontrent la courbe τ en un certain nombre de points variables et les courbes qui leur correspondent sur F passent un certain nombre de fois par le point P.

11. On sait que la somme des multiplicités des courbes C^i en O, $(\alpha,1), \ldots, (\alpha,\beta-1)$ est égale à p. Supposons que les courbes C^i passent u fois par le point $(\alpha,\beta-1)$. On doit avoir

$$\lambda_i + \mu_i + (\beta - 1)u \leqslant p.$$

Par conséquent les courbes C^i telle que l'on ait

$$\lambda_i + \mu_i + \beta - 1 > p$$

ne peuvent plus passer par $(\alpha,\beta-1)$.

Considérons le système $| C^j |$ où l'on a

$$\lambda_j = a - z, \ \mu_j = b + z.$$

Les courbes C^j passent au plus $a - z$ fois par $(\alpha,1), \ldots, (\alpha,\beta-1)$ et on a

$$\begin{aligned}\lambda_j + \mu_j + (\beta - 1)(a - z) &= a + b + z(\beta - 1) + (a - z)(\beta - 1)\\ &= b + a\beta = p,\end{aligned}$$

donc le système $| C^j |$ existe.

De la même manière, on voit que la condition pour que les courbes C^i ne passent pas par le point $(\beta,\alpha-1)$ est que l'on ait

$$\lambda_i + \mu_i + \alpha - 1 > p.$$

Il existe donc un système de courbes correspondant aux valeurs

$$\lambda = b' + z\alpha, \ \mu = a' - z$$

et dont les courbes passent $a' - z$ fois par $(\beta,\alpha-1)$.

12. Les nombres p, α, β étant donnés, on peut calculer a,b,a',b' et par suite H,H',x et m. De plus, on peut calculer les solutions des congruences (1) telles que $\lambda + \mu < p$. On peut donc établir la structure du point de diramation O'.

Supposons par exemple que l'on ait

$$p = 31, \ \alpha = 23, \ \beta = 27.$$

On a $a = 1$, $b = 4$, $a' = 1$, $b' = 8$. Les nombres $b - a' = 3$, $b' - a = 7$ sont premiers, donc $m = 1$.

On a ensuite

$$H + H' = 3, 3(x + 1) + H' = 7,$$

d'où $H' = 1, H = 2$ et $x = 1$.

Les courbes C^1 passent 5 fois par O, une fois par les points $(\alpha,1)$, $\ldots$, $(\alpha,26)$ 4 fois par $(\beta,1)$, 2 fois par $(\beta,2)$, une fois par $(\beta,3)$, $\ldots$, $(\beta,(22$, une fois par les points $(\beta,2,1)$, $(\beta,2,2)$.

Le point O′ est triple pour la surface Φ, le cône tangent se décomposant en trois plans dont deux ne se rencontrent pas en dehors de O′ mais rencontrent le troisième suivant des droites. Sur la surface Φ_1 on a trois droites σ_α, τ, σ_β, les première et dernière ne se rencontrant pas mais τ rencontrant chacune des autres en un point.

13. Nous prendrons comme second exemple une involution que nous avons déjà étudiée en appliquant les méthodes de notre ouvrage cité plus haut (3). Nous poserons

$$p = 9\nu^2 + 3\nu + 1, \ \alpha = 3\nu^2 + 2\nu + 1, \ \beta = 9\nu^2 + 2,$$

ν étant choisi de telle sorte que p soit un nombre premier.

On a

$$a = 1, \ b = 3\nu - 1, \ a' = 2, \ b' = 3\nu^2 - \nu - 1,$$

$$- \ b - a' = 3\nu - 3, \ b' - a = 3\nu^2 - \nu - 2 - (\nu - 1)(3\nu = 2).$$

Le plus grand commun diviseur de $b - a'$ et de $b' - a$ est $\nu - 1$, donc $m = \nu - 1$.

On déduit de ces relations $H' = 2, x = \nu - 1, H = 1$.

Les courbes C^1 passent 3ν fois par O, une fois par les points $(\alpha,1)$, $\ldots$, $(\alpha,9\nu^2 + 1)$, $3\nu - 1$ fois par $(\beta,1)$, $\ldots$, $(\beta,\nu-1)$, 2ν fois par (β,ν), 2 fois par $(\beta,\nu+1)$, $\ldots$, $(\beta,3\nu+2\nu)$, $\nu - 1$ fois par les points $(\beta,\nu,1)$, $(\beta,\nu,1,1)$.

Le point O′ est multiple d'ordre $\nu + 2$ pour la surface Φ. Sur la surface Φ_1, on a une droite σ_α, une courbe τ d'ordre $\nu - 1$ et une conique σ_β.

On notera que les courbes C^3 et C^4 passent $\nu - 3$ fois par le point $P = (\beta,\nu,1,1)$.

Liège, le 20 janvier 1972.

(3) *Détermination de la structure d'un point uni d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1971, pp. 918-934, 1001-1012).