Bulletin de la Classe des sciences

Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple (3e note)

Lucien Godeaux

Résumé
Étude des points de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie, dans le cas où le cône tangent en un de ces points se décompose en quatre cônes rationnels.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

(Troisième note)

Résumé. — Étude des points de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie, dans le cas où le cône tangent en un de ces points se décompose en quatre cônes rationnels.

Nous considérons, dans cette dernière note (1), un point de diramation d'une surface algébrique image d'une involution cyclique d'ordre premier p appartenant à une surface algébrique, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, en lequel le cône tangent se décompose en quatre cônes rationnels. Nous établissons les propriétés d'un tel point par une méthode différente de celle que nous avons utilisée dans notre ouvrage sur les involutions (2), en partant de l'ordre des quatre cônes, puis nous confrontons les résultats des deux méthodes. Comme dans la seconde note, nous n'avons pas pu pousser l'application de la méthode jusqu'au bout, car cela nous aurait conduit à introduire de nombreuses notations, mais la méthode, telle qu'elle a été exposée, peut être appliquée intégralement lorsque l'on connaît la valeur de p.

Les notations générales sont les mêmes que dans nos deux premières notes.

1. Soit F une surface algébrique normale de S_r contenant une

(1) Les deux premières notes ont paru dans le Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1972, pp. 6-22, 158-170.

(2) *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Éditions Cremonese, 1963).

involution I d'ordre premier $p = 2\nu + 1$, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous pouvons supposer sans restriction que sur cette surface l'involution I est engendrée par une homographie périodique H de S_r, possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ dont un seul, σ_0, rencontre F, aux points unis de l'involution. Nous désignerons par $|C|$ le système linéaire découpé par les hyperplans unis pour H ne contenant pas σ_0. Nous désignerons par r_0 la dimension de ce système, qui est dépourvu de points-base.

Considérons un point uni O de l'involution, de seconde espèce et de troisième catégorie. Soit $|C^1|$ le système des courbes C assujetties à la seule condition de passer par O. Sur une courbe C^1, le point O est l'origine de quatre branches, deux linéaires et deux superlinéaires.

Nous désignerons par $(\alpha,1), (\alpha,2), \ldots, (\alpha,\beta-1)$ les points infiniment voisins successifs de O appartenant à la première branche linéaire et communs à toutes les courbes C^1, par $(\beta,1), (\beta,2), \ldots, (\beta,\alpha-1)$ les points infiniment voisins successifs de O appartenant à la seconde branche linéaire et communs à toutes les courbes C^1.

Une des branches superlinéaires contient les points $(\alpha,1), \ldots, (\alpha,x+1)$ et un certain nombre de points infiniment voisins successifs de $(\alpha,x+1)$ qui, jusqu'à un certain point P, appartiennent à toutes les courbes C^1. De même, la seconde branche superlinéaire contient les points $(\beta,1), \ldots, (\beta,x'+1)$ et un certain nombre de points infiniment voisins successifs de $(\beta,x'+1)$ qui, jusqu'à un certain point Q, appartiennent à toutes les courbes C^1.

Les points appartenant à toutes les courbes C^1 sont unis de seconde espèce, sauf les points $(\alpha,\beta-1), (\beta,\alpha-1)$,P,Q, qui sont unis de première espèce.

2. Supposons que les courbes C^1 aient en $(\alpha,\beta-1)$ la multiplicité a, en P la multiplicité m, en Q la multiplicité n et en $(\beta,\alpha-1)$ la multiplicité b.

Les courbes C^1 ont en O la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$, λ_1 tangentes confondues avec la droite passant par $(\alpha,1)$ et μ_1 confondues avec la droite passant par $(\beta,1)$, les nombres λ_1, μ_1 satisfaisant aux congruences équivalentes

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \ \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p) \qquad (1)$$

Les courbes C^1 passent λ_1 fois par les points $(\alpha,1), \ldots, (\alpha,x)$, y

fois par le point $(\alpha, x+1)$, a fois par les points $(\alpha, x+2), \ldots, (\alpha, \beta-1)$. Pour obtenir la suite de points commençant à $(\alpha, x+1)$ et se terminant à P, nous devons faire les mêmes opérations que pour chercher le plus grand commun diviseur de $\lambda_1 - y$ et de $y - a$, et ce plus grand commun diviseur est la multiplicité du point P pour les courbes C^1. Nous sommes donc conduits à poser

$$\lambda_1 - y = \mathrm{H}m, \quad y - a = \mathrm{H}'m,$$

H et H′ étant des entiers qui doivent être premiers entre eux, puisque la multiplicité de P est exactement m. On en déduit

$$\lambda_1 = a + (\mathrm{H} + \mathrm{H}')m, \quad y = a + \mathrm{H}'m.$$

On aura de même

$$\mu_1 = b + (\mathrm{K} + \mathrm{K}')n, \quad y' = b + \mathrm{K}'n,$$

y' étant la multiplicité de $(\beta, x'+1)$ pour les courbes C^1, K et K′ étant des entiers premiers entre eux.

La somme des multiplicités des courbes C^1 aux points O et $(\alpha, 1)$, $\ldots, (\alpha, \beta-1)$ doit être égale à p. On a donc

$$\lambda_1 + \mu_1 + x\lambda_1 + y + (\beta - x - 2)a = p,$$

c'est-à-dire

$$[(x + 1)(\mathrm{H} + \mathrm{H}') + \mathrm{H}']m + (\mathrm{K} + \mathrm{K}')n + \beta a + b = p \tag{2}$$

On a de même

$$[(x' + 1)(\mathrm{K} + \mathrm{K}') + \mathrm{K}']n + (\mathrm{H} + \mathrm{H}')m + \alpha b + a = p. \tag{3}$$

Observons que le point O étant de troisième catégorie, il existe deux entiers h_1, h_2 supérieurs à l'unité tels que l'on ait

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = h_1 p, \quad \mu_1 + \beta\lambda_1 = h_2 p,$$

c'est-à-dire

$$(\mathrm{H} + \mathrm{H}')m + \alpha(\mathrm{K} + \mathrm{K}')n + a + \alpha b = h_1 p,$$

$$(\mathrm{K} + \mathrm{K}')n + \beta(\mathrm{H} + \mathrm{H}')m + \beta a + b = h_2 p.$$

3. Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace à r_0 dimensions. Il correspond à la surface F une surface Φ image de l'involution I, dont nous désignerons par Γ les sections hyperplanes.

Nous désignerons par Γ^1 les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C^1, courbes qui sont découpées sur Φ par les hyperplans passant par le point O' homologue de O. Enfin, nous désignerons par Φ_1 la surface dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ^1, cette surface étant la projection de Φ à partir de O' sur un hyperplan de l'espace ambiant.

Aux domaines des points $(\alpha,\beta-1)$,P,Q,$(\beta,\alpha-1)$ correspondent respectivement sur la surface Φ_1 des courbes rationnelles σ_α d'ordre a, τ_1 d'ordre m, τ_2 d'ordre n et σ_β d'ordre b. Le point O' est donc multiple d'ordre $a + m + n + b$ pour Φ, le cône tangent en ce point étant la projection de ce point des courbes σ_α, τ_1, τ_2, σ_β. Si N est l'ordre de la surface Φ, Φ_1 est d'ordre $N - (a + m + n + b)$.

Sur la surface Φ ou Φ_1, on a

$$\Gamma \equiv \Gamma^1 + \sigma_\alpha + \tau_1 + \tau_2 + \sigma_\beta$$

et on sait que si l'on écrit les courbes dans l'ordre σ_α, τ_1, τ_2, σ_β, chacune d'elles rencontre la précédente et la suivante en un point mais ne rencontre pas les autres. Il en résulte que les degrés virtuels de ces courbes sont respectivement $-(a + 1)$, $-(m + 2)$, $-(n + 2)$, $-(b + 1)$.

4. Les courbes C^1 assujetties à toucher en O une droite distincte de leurs tangentes fixes acquièrent en ce point une multiplicité supérieure à $\lambda_1 + \mu_1$ et il leur correspond sur Φ_1 les courbes découpées par les hyperplans passant par le point O_1 commun à τ_1 et τ_2. Il en résulte qu'à ces courbes Γ^2 correspondent sur F des courbes C^2 passant a fois par $(\alpha,\beta-1)$, $m - 1$ fois par P, $n - 1$ fois par Q et b fois par $(\beta,\alpha-1)$. On peut en effet supposer sans restriction que r a été choisi assez grand pour que les courbes σ_α, τ_1, τ_2, σ_β soient normales et que O_1 soit donc simple pour τ_1 et τ_2.

Il en résulte que les courbes C^2 passent $a + H'(m - 1)$ fois par $(\alpha,x + 1)$, $a + (H + H')(m - 1)$ fois par (α,x), $b + K'(n - 1)$ fois par $(\beta,x' + 1)$, $b + (K + K')(n - 1)$ fois par (β,x').

La droite $O'O_1'$ est double pour le cône tangent à Φ en O', donc le point O_1' est simple, ou double conique, ou double biplanaire pour la surface Φ_1.

Plaçons-nous dans le premier cas et appelons Φ_2 la projection de Φ_1 à partir du point O_1' et ρ_2 l'intersection de Φ_2 avec le plan tangent à Φ_1 en O'_1. Cette droite est exceptionnelle et représente le domaine d'un point P_1, commun aux courbes C^2 et simple pour ces courbes.

Observons que les courbes C^2 ont en O λ_2 tangentes confondues avec la droite passant par $(\alpha,1)$, μ_2 tangentes confondues avec la droite passant par $(\beta,1)$, donc la multiplicité $\lambda_2 + \mu_2$ en O. On doit avoir $\lambda_2 + \mu_2 > \lambda_1 + \mu_1$ donc il existe au moins un des nombres λ_2, μ_2 supérieur au nombre correspondant λ_1, μ_1. Supposons que l'on ait $\lambda_2 > \lambda_1$.

Dans ces conditions, il existe un entier $x_1 < x$ tel que les courbes C^2 passent λ_2 fois par les points $(\alpha,1), \ldots, (\alpha,x_1)$, y_1 fois par (α,x_1+1), $a + (H + H')(m - 1)$ fois par $(\alpha,x_1 + 2), \ldots, (\alpha,x)$, $a + H'(m - 1)$ fois par $(\alpha,x+1)$, a fois par $(\alpha,x+2), \ldots, (\alpha,\beta-1)$. Le point P_1 étant simple pour les courbes C^2, on doit poser

$$\lambda_2 - y_1 = H_1, \quad y_1 - a - (H + H')(m - 1) = H'_1,$$

les nombres H_1 et H'_1 étant premiers entre eux. On en déduit

$$\lambda_2 = a + (H + H')(m - 1) + H_1 + H'_1,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_2 = \lambda_1 - (H + H') + H_1 + H'_1, \quad y_1 = y - (H + H') + H'_1.$$

D'autre part, les points $(\beta,1), \ldots, (\beta,x')$ ont la même multiplicité pour les courbes C^2 et on a

$$\mu_2 = b + (K + K')(n - 1) = \mu_1 - (K + K').$$

On doit avoir

$$H_1 + H'_1 > H + H' + K + K'. \tag{6}$$

La somme des multiplicités de O et des points $(\alpha,1), \ldots, (\alpha,\beta-1)$ pour les courbes C^2 doit être égale à p, ce qui donne, en tenant compte de la relation (2),

$$(x_1 + 1)(H_1 + H'_1) + H'_1 = (x + 1)(H + H') + H' + K + K'. \tag{7}$$

De même la somme des multiplicités en O, $(\beta,1), \ldots, (\beta,\alpha-1)$ doit être égale à p, ce qui donne, en tenant compte de (3),

$$H_1 + H'_1 = H = H' + (x' + 1)(K + K') + K'. \tag{8}$$

5. Supposons que le point O'_1 soit double conique pour la surface Φ_1. L'intersection de la surface Φ_2 avec le cône tangent en O'_1 à

Φ_1 est cette fois une conique ρ, de degré virtuel -2 (nous utilisons la même notation qu'au numéro précédent pour éviter les complications d'écriture, aucune confusion n'étant possible). Cette conique représente le domaine d'un point P_1 de F, double pour les courbes C^2. Ce cas s'étudie comme le précédent en remarquant que le plus grand commun diviseur de $\lambda_2 - y_1$ et de $y_1 - a - (H + H')$ a cette fois la valeur 2. On posera donc

$$\lambda_2 - y_1 = 2H_1, \; y_1 - a - (H + H')(m - 1) = 2H'_1,$$

d'où

$$\lambda_2 = a + (H + H')(m - 1) + 2(H_1 + H'_1),$$

$$y_1 = a + (H + H')(m - 1) + 2H'_1.$$

Les calculs se conduisent exactement comme dans le cas précédent et on arrive aux formules (6), (7) et (8) où l'on doit remplacer H_1 et H'_1 par $2H_1$ et $2H'_1$. On obtient ainsi

$$2(H_1 + H'_1) > H + H' + K + K',$$

$$2(x_1 + 1)(H_1 + H'_1) = (x + 1)(H + H') + K + K',$$

$$2(H_1 + H'_1) = H + H' + (x' + 1)(K + K') + K'.$$

Sur la surface Φ_2 on a une courbe σ_α d'ordre a, une courbe τ_1 d'ordre $m - 1$, une courbe ρ d'ordre deux, une courbe τ_1 d'ordre $n - 1$ et une courbe τ_β d'ordre b. Les courbes τ_1, τ_2 ne se rencontrent plus mais elles rencontrent chacune en un point la conique ρ. On a

$$\Gamma \equiv \Gamma^2 + \sigma_\alpha + \tau_1 + 2\rho + \tau_2 + \sigma_\beta.$$

6. Envisageons maintenant le dernier cas, où le point O'_1 est double biplanaire pour la surface Φ_1. Le cône tangent en ce point à cette surface se scinde en deux plans qui rencontrent la surface Φ en deux droites ρ_1, ρ_2 qui se rencontrent en un point et qui ont comme degré virtuel -2. Ces droites représentent les domaines de deux points unis de première espèce P_1, P_2, qui sont simples pour les courbes C^2.

Deux cas peuvent se présenter:

1° Les suites superlinéaires d'origine O sur les courbes C^2 contiennent toutes deux le point $(\alpha,1)$.

2° Ces deux suites contiennent l'une le point $(\alpha,1)$, l'autre le point $(\beta,1)$.

Examinons le premier cas. Supposons que les suites se détachent de la suite $(\alpha,1)\ldots$ aux points (α,x_1+1) et la seconde au point (α,x_2+1), où $x_2 < x_1 < x$.

Le raisonnement fait au n° 4 montre que le point (α,x_1) est multiple d'ordre $a+(\mathrm{H}+\mathrm{H}')(m-1)+\mathrm{H}_1+\mathrm{H}'_1$. Les points $(\alpha,x_1-1),\ldots,$ (α,x_2+2) ont la même multiplicité. Soit y_2 la multiplicité du point (α,x_2+1). Les points $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,x_2)$ ont la multiplicité λ_2. Nous sommes donc conduits à poser

$$\lambda_2 = a+(\mathrm{H}+\mathrm{H}')(m-1)+\mathrm{H}_1+\mathrm{H}'_1+\mathrm{H}_2+\mathrm{H}'_2,$$

$$y_2 = a+(\mathrm{H}+\mathrm{H}')(m-1)+\mathrm{H}_1+\mathrm{H}'_1+\mathrm{H}'_2,$$

les nombres H_2 et H'_2 étant des entiers premiers entre eux. On en déduit

$$\lambda_2 = \lambda_1-(\mathrm{H}+\mathrm{H}')+\mathrm{H}_1+\mathrm{H}'_1+\mathrm{H}_2+\mathrm{H}'_2,$$

$$y_2 = y_1+\mathrm{H}_1+\mathrm{H}'_2.$$

En exprimant que la somme des multiplicités des courbes C^2 aux points O et $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,\beta-1)$ est égale à p, on trouve, en tenant compte des relations (2) et (7),

$$(x_2+1)(\mathrm{H}_2+\mathrm{H}'_2)+\mathrm{H}'_2 = 0,$$

ce qui est absurde. Cela montre que la première hypothèse ne peut se présenter.

Supposons donc que la suite superlinéaire d'origine O sur les courbes C^2 et contenant le point P_2 passe par les points $(\beta,1),\ldots,(\beta,x'_1+1)$. En répétant le raisonnement fait plus haut, on a

$$\mu_2 = \mu_1-(\mathrm{K}+\mathrm{K}')+\mathrm{K}_1+\mathrm{K}'_1,$$

On a d'ailleurs

$$\lambda_2 = \lambda_1-(\mathrm{H}+\mathrm{H}')+\mathrm{H}_1+\mathrm{H}'_1,$$

et ensuite

$$(x'_1+1)(\mathrm{K}_1+\mathrm{K}'_1)+\mathrm{K}'_1 = (x+1)(\mathrm{K}+\mathrm{K}')+\mathrm{K}'+\mathrm{H}+\mathrm{H}'.$$

De $\lambda_2+\mu_2 > \lambda_1+\mu_1$, on déduit

$$\mathrm{H}_1+\mathrm{H}'_1+\mathrm{K}_1+\mathrm{K}'_1 > \mathrm{H}+\mathrm{H}'+\mathrm{K}+\mathrm{K}'.$$

Les entiers K_1 et K'_1 sont évidemment premiers entre eux.

Des droites ρ_1, ρ_2, chacune rencontre une des courbes τ_1, τ_2, par exemple ρ_1 rencontre τ_1 en un point et ρ_2 rencontre τ_2 en un point. Sur la surface Φ_2, on a une courbe σ_α d'ordre a, une courbe τ_1 d'ordre $m - 1$, deux droites ρ_1, ρ_2, une courbe τ_2 d'ordre $n - 1$ et une courbe σ_β d'ordre b. On a la relation fonctionnelle

$$\Gamma \equiv \Gamma^2 + \sigma_\alpha + \tau_1 + 2(\rho_1 + \rho_2) + \tau_2 + \sigma_\beta.$$

7. Désignons par Γ' les sections de Φ_1 par les hyperplans ayant un contact d'ordre $m - 1$ avec la courbe τ_1 en O'_1. Les courbes Γ' ne rencontrent plus la courbe τ_1 en des points variables, mais rencontrent σ_α en a points, σ_β en b points et τ_2 en $n - 1$ points. Les courbes C′ qui leur correspondent sur F passent a fois par les points $(\alpha,1), \dots, (\alpha,\beta-1)$ et si l'on désigne par μ' le nombre des tangentes en O aux courbes C′ qui contiennent $(\beta,1)$, on doit avoir

$$\mu' + \beta a = p.$$

Désignons par a_1 le quotient de la division de p par β et par C″ les courbes C correspondant aux valeurs $\lambda = a_1$, $\mu = p - a_1\beta$. A ces courbes C″ correspondent sur Φ_1 des sections hyperplanes rencontrant la courbe σ_α en a_1 points variables. Cette courbe étant d'ordre a, on a $a_1 \leqslant a$ et précisément $a_1 = a$. Il en résulte que *la multiplicité des courbes* C^1 *au point* $(\alpha,\beta-1)$ *est le quotient de la division de p par* β.

On établit de même que *la multiplicité du point* $(\beta,\alpha-1)$ *par les courbes* C^1 *est le quotient de la division de p par* α.

C'est un résultat que nous avions déjà obtenu mais par une autre méthode dans notre ouvrage sur les involutions.

On peut observer d'après les formules (2) et (3), que les nombres $a\beta + b, \alpha b + a$ sont inférieurs à p car autrement les nombres m et n seraient nuls et le point O ne serait pas un point uni de la troisième catégorie. Si donc l'on pose

$$p = a\beta + b',\ p = b\alpha + a',$$

on a $b < b'$ et $a < a'$.

8. Nous allons maintenant établir la liaison entre la méthode que nous venons d'exposer et celle qui a été développée dans notre ouvrage sur les involutions. Dans celui-ci, nous supposions connus p, α et β. Ici, nous avons supposé connus a, b, m et n.

Déterminons un entier r tel que l'on ait

$$rb' < \beta < (r + 1)b'$$

puis un entier m satisfaisant à la double inégalité

$$m(\beta - rb') < b' < (m + 1)(\beta - rb').$$

Les quantités λ_1, μ_1 sont alors données par

$$\lambda_1 = a + m(ra + 1), \; \mu_1 = b' - m(\beta - rb').$$

Nous avons trouvé pour λ_1 la valeur $a + (\mathrm{H} + \mathrm{H}')m$, donc on a

$$\mathrm{H} + \mathrm{H}' = ra + 1.$$

Soit maintenant r' un entier satisfaisant à

$$r'a' < a' < (r' + 1)a'.$$

Le nombre n est alors donné par

$$n(\alpha - r'a') < a' < (n + 1)(\alpha - r'a'),$$

et on a

$$\lambda_1 = a' - (\alpha - r'a')p, \; \mu_1 = b + (r'b + 1).$$

On en déduit

$$\mathrm{K} + \mathrm{K}' = r'b + 1,$$

On a de plus

$$\lambda_1 = m(ra + 1) + a = a' - n(\alpha' - r'a'),$$

$$\mu_1 = b' - m(\beta - rb') = b + n(r'b + 1),$$

c'est-à-dire

$$m(ra + 1) + n(\alpha - r'a') = a' - a,$$

$$n(rb' + 1) + m(\beta - rb') + b' - b.$$

Nous retrouvons donc les inégalités $a' > a$, $b' > b$, mais cette condition apparaît comme une *condition nécessaire* pour que le point O soit uni de troisième catégorie. Elle n'est d'ailleurs pas suffisante comme le montrent certains exemples de points unis de première ou de seconde catégorie.

Liège, le 4 février 1972.