Bulletin de la Classe des sciences

Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple (1er note)

Lucien Godeaux

Résumé
Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple d'ordre premier image d'une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

(Première note)

Résumé. — Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple d'ordre premier image d'une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique.

Si l'on considère une surface algébrique normale F transformée en soi par une homographie H de période p, possédant p axes ponctuels dont un seul rencontre F, en un nombre fini de points, l'involution d'ordre premier p engendrée sur F par H possède un nombre fini de points unis et l'image Φ de cette involution possède un nombre fini de points de diramation, isolés. Dans nos recherches sur ces questions (1), nous avons déterminé la structure de ces points de diramation et montré qu'en un de ces points O′, la surface Φ possède un point multiple, le cône tangent en ce point se décomposant en deux, trois ou quatre cônes rationnels, ou est un seul cône rationnel d'ordre p. Précisément, ce dernier cas excepté, le cône tangent en O′ à Φ se décompose en quatre cônes

$$(\sigma_\alpha),(\tau_\alpha),(\tau_\beta),(\sigma_\beta),$$

(1) *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Ed. Cremonese, 1963).

chacun de ces cônes rencontrant le précédent et le suivant suivant une droite, simple pour les deux cônes. Le point O′ est l'origine de trois suites de points doubles biplanaires infiniment voisins successifs dont le dernier est un point biplanaire ordinaire ou est remplacé par un point double conique. Dans ces conditions, le point de diramation O′ est dit de troisième catégorie. Il est dit de seconde catégorie si l'un des cônes $(\tau_\alpha),(\tau_\beta)$ manque, de première catégorie si ces deux cônes manquent.

Dans cette note et dans celles qui lui feront suite, nous nous proposons de compléter nos recherches sur la structure des points de diramation, ce qui nous paraît nécessaire comme le montre l'exemple que nous avons développé récemment ([1]). Dans cette première note, nous nous occuperons des points de diramation de la première catégorie.

Nous aurons à considérer des couples de surfaces birationnellement identiques. Comme il est d'usage, nous désignerons par le même symbole deux courbes homologues tracées sur ces surfaces, en indiquant cependant parfois en exposant l'ordre de la courbe.

1. Soit F une surface algébrique normale située dans un espace S_r à r dimensions, transformée en soi par une homographie H dont la période est un nombre premier $p = 2\nu + 1$, possédant p axes ponctuels $\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{p-1}$ dont un seul, σ_0, rencontre la surface, en un nombre fini de points. L'involution I, engendrée sur F par H, ne possède qu'un nombre fini de points unis: les points de rencontre de la surface avec σ_0. On peut supposer r et par conséquent les dimensions respectives $r_0,r_1,\ldots,r_{p-1}$ des axes $\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{p-1}$ aussi grands qu'on le veut. Dans ces conditions, en rapportant projectivement les sections de F par les hyperplans passant par les axes de H sauf par σ_0, aux hyperplans d'un espace à r_0 dimensions, il correspond à F une surface Φ image de l'involution I sur laquelle les points de diramation sont isolés. Cette surface Φ est la projection de F à partir de l'espace de dimension minimum contenant les axes de H sauf σ_0.

Rappelons que les points unis de l'involution sont de deux espèces suivant que le plan tangent à F en un, O, de ces points rencontre suivant une droite un des espaces $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{p-1}$ ou suivant qu'il rencontre

([1]) *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1971, pp. 1098-1101).

deux de ces espaces suivant un point. Dans le premier cas, nous avons démontré que le point de diramation O′ homologue de O est multiple d'ordre p pour la surface Φ, le cône tangent étant rationnel et irréductible. Ce sont les points de seconde espèce qui retiendront notre attention.

Si O est un point uni de seconde espèce, il existe deux entiers α,β attachés à ce point. Dans le plan tangent à F en O, H détermine une homographie que l'on peut représenter par les équations

$$x_0' : x_1' : x_2' = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^\alpha x_2,$$

soit par les équations

$$x_0' : x_1' : x_2' = x_0 : \eta^\beta x_1 : \eta x_2$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité, où l'on pose $\eta = \varepsilon^\alpha$ et enfin où O a pour coordonnées $x_1 = x_2 = 0$. Il existe deux tangentes à F en O, soient a,b, qui sont unies pour l'homographie H. p étant premier, $\alpha\beta - 1$ doit être multiple de p et nous poserons $\alpha\beta - 1 = hp$.

Désignons par λ_1,μ_1 les solutions en nombres entiers positifs des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \ \mu + \beta\lambda \equiv 0, \quad (\text{mod. } p) \tag{1}$$

la somme $\lambda_1 + \mu_1$ étant la plus petite possible. On a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = h_1 p, \ \mu_1 + \beta\lambda_1 = h_2 p.$$

Le point O appartient à la première, à la seconde ou à la troisième catégorie suivant que l'on a $h_1 = h_2 = 1$, ou suivant qu'un seul de ces nombres est égal à l'unité, ou suivant qu'ils sont tous deux supérieurs à l'unité.

Nous nous occuperons dans cette première note des points de la première catégorie ($h_1 = h_2 = 1$).

2. Désignons par $|C|$ le système des sections hyperplanes de F, par $|\Gamma|$ celui des sections hyperplanes de Φ et par $|C_0|$ celui qui correspond sur F à ce dernier système, c'est-à-dire le système découpé sur F par les hyperplans passant par les espaces $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{p-1}$.

---

(3) *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Académie roy. de Belgique, 1952, 89 p.)

Le système $| C_0 |$ est dépourvu de points-base et nous désignerons par C^1 les courbes C_0 passant par un point uni O, de seconde espèce et de première catégorie. Ces courbes ont en O la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$, λ_1 tangentes étant confondues avec a et μ_1 avec b.

Soient C^2 les courbes C^1 assujetties à toucher en O une droite distincte de a,b. Elles ont en O la multiplicité $\lambda_2 + \mu_2$, les nombres λ_2,μ_2 satisfaisant aux congruences (1), la somme $\lambda_2 + \mu_2$ étant immédiatement supérieure à $\lambda_1 + \mu_1$. Ces courbes ont λ_2 tangentes confondues avec a et μ_2 avec b.

Et ainsi de suite. Nous formons ainsi une suite de systèmes linéaires

$$| C^1 |, | C^2 |, \ldots, | C^\nu |$$

pour lesquels le point O est respectivement multiple d'ordre $\lambda_1 + \mu_1$, $\lambda_2 + \mu_2, \ldots, \lambda_\nu + \mu_\nu$, les nombres λ,μ satisfaisant aux congruences (1) et les sommes $\lambda_2 + \mu_1, \lambda_1 + \mu_1, \ldots, \lambda_\nu + \mu_\nu$ étant rangées dans l'ordre croissant. Le système $| C^i |$ a λ_i tangentes confondues avec a et μ_i confondues avec b. Les courbes du système $| C^{\nu+1} |$ ont en O un point multiple d'ordre p et des tangentes variables.

Nous désignerons par $| \Gamma^1 |, | \Gamma^2 |, \ldots, | \Gamma^\nu |$ les systèmes linéaires complets qui correspondent sur Φ respectivement aux systèmes $| C^1 |, | C^2 |, \ldots, | C^\nu |$. De plus, nous désignerons par $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\nu$ les surfaces qui ont comme sections hyperplanes respectivement les courbes $\Gamma^1, \Gamma^2, \ldots, \Gamma^\nu$. La surface Φ_i est la projection de la surface Φ_{i-1} à partir d'un point de cette dernière surface.

Si l'on avait $\lambda_1 = \mu_1$, on aurait $\alpha = \beta = p - 1$ et la structure du point de diramation O' est connue. C'est un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs $\nu - 1$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. Nous avons appelé ces points des points unis ou de diramation symétriques.

Cela étant, nous supposerons $\lambda_1 > \mu_1$. Observons que cette hypothèse entraîne $\alpha > \beta$ et réciproquement.

Les courbes C^1 ont en O la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$ et comme nous l'avons rappelé, λ_1 tangentes confondues avec a et μ_1 avec b. De plus, en adoptant les notations définies dans notre ouvrage sur les involutions (n° 35), ces courbes passent λ_1 fois par les points $(\alpha,1), (\alpha,2), \ldots, (\alpha,\beta - 1)$ et μ_1 fois par les points $(\beta,1), (\beta,2), \ldots, (\beta,\alpha - 1)$. Ces points sont unis de seconde espèce sauf les derniers $(\alpha,\beta - 1), (\beta,\alpha - 1)$, qui sont unis de première espèce.

Sur la surface Φ_1 il correspond aux domaines des points $(\alpha,\beta - 1)$, $(\beta,\alpha - 1)$ des courbes rationnelles $\sigma_\alpha,\sigma_\beta$, que l'on peut supposer normales puisque r_0 peut être pris suffisamment grand. Ces courbes ont en commun un point O'_1.

Le cône tangent en O' à la surface Φ est la projection de ce point des deux courbes $\sigma_\alpha,\sigma_\beta$. Il se compose donc de deux cônes ayant en commun une droite simple pour chacun des cônes. Il en résulte que la surface Φ peut posséder un point infiniment voisin de O' qui est simple ou double. Le point O'_1 est donc simple ou double pour la surface Φ_1.

3. Supposons $\mu_1 > 1$ et considérons les courbes C^2 qui ont en O la multiplicité $\lambda_2 + \mu_2$. Sur la surface Φ_2, qui est la projection de Φ_1 à partir de O'_1, les courbes $\sigma_\alpha,\sigma_\beta$ sont d'ordres $\lambda_1 - 1,\mu_1 - 1$ et par conséquent les courbes C^2 ne passent plus que $\lambda_1 - 1$ fois par $(\alpha,\beta - 1)$ et $\mu_1 - 1$ fois par $(\beta,\alpha - 1)$. Supposons que ces courbes passent λ_2 fois par les points $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,x)$, y fois par le point $(\alpha,x + 1)$, $\lambda_1 - 1$ fois par les points $(\alpha,x + 2),\ldots,(\alpha,\beta - 1)$. La somme des multiplicités de ces points et de O pour la branche linéaire d'origine O d'une courbe C^2 devant être égale à p, on a

$$\lambda_2 + \mu_2 + x\lambda_2 + y + (\beta - 2 - x)(\lambda_1 - 1) = p$$

c'est-à-dire, puisque $\beta\lambda_1 = p - \mu_1$,

$$(x + 1)(\lambda_2 - \lambda_1 + 1) + y = \beta + \lambda_1 + \mu_1 - \mu_2 - 1.$$

Les courbes C^2 passent $y - \lambda_1 + 1$ fois par le point $(\alpha,x + 1,1)$ et par une suite de points qui lui sont infiniment voisins successifs, sur une branche superlinéaire d'origine O appartenant à toute courbe C^2. Ces points sont unis de seconde espèce sauf le dernier qui est uni de première espèce. Ces points s'obtiennent en effectuant les mêmes opérations que pour chercher le plus grand commun diviseur des nombres λ_2 et $y - \lambda_1 + 1$. Au domaine du dernier point correspond sur la surface Φ_2 une courbe rationnelle $\rho_{\alpha 1}$.

Supposons de même que les courbes C^2 passent μ_2 fois par les points $(\beta,1),\ldots,(\beta,x'),y'$ fois par $(\beta,x' + 1),\mu_1 - 1$ fois par les points $(\beta,x' + 2),\ldots,(\beta,\alpha - 1)$. On doit avoir

$$(x' + 1)(\mu_2 - \mu_1 + 1) + y' = \alpha + \lambda_1 + \mu_1 - \lambda_2 - 1.$$

Les courbes C^2 passent $y' - \mu_1 + 1$ fois par le point $(\beta,x' + 1,1)$

et par une suite de points qui lui sont infiniment voisins successifs, unis de seconde espèce, sauf le dernier qui est uni de première espèce. Au domaine de ce point correspond sur la surface Φ_1 une courbe rationnelle $\rho_{\beta 1}$.

Comme on a $\lambda_1 > \mu_1 > 1$, il existe des solutions x,y,x',y' des équations précédentes, sauf si $\lambda_2 = \lambda_1 - 1$ ou $\mu_2 = \mu_1 - 1$. Nous écarterons provisoirement cette hypothèse.

La surface Φ_2 est la projection de la surface Φ_1 à partir de O_1'. Comme ce point est au plus double pour Φ_1, les courbes $\rho_{\alpha 1}$ et $\rho_{\beta 1}$ sont des droites et le point O_1' est double biplanaire pour la surface Φ_1.

Sur la surface Φ_1, on a donc quatre courbes

$$\sigma_1, \rho_{\alpha 1}, \rho_{\beta 1}, \sigma_\beta,$$

chacune d'elle rencontrant la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontrant pas les autres.

Le point O_2', commun aux droites $\rho_{\alpha 1}, \rho_{\beta 1}$ est simple ou double pour la surface Φ_2.

4. Les courbes C^3 passent $\lambda_3 + \mu_3$ fois par O. Sur la surface Φ_3, les courbes $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ sont les projections à partir de O_1' des courbes de mêmes symboles de Φ_1. Comme ces courbes ne passent pas par O_1', les courbes $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ sont d'ordres $\lambda_1 - 1, \mu_1 - 1$ sur la surface Φ_3. Les courbes C^3 passent donc $\lambda_1 - 1$ fois par $(\alpha,\beta - 1)$ et $\mu_1 - 1$ fois par $(\beta,\alpha - 1)$.

On répétera ensuite le même raisonnement que pour les courbes C^2 et cela conduira à deux courbes rationnelles $\rho_{\alpha 2}, \rho_{\beta 2}$ sur la surface Φ_3, courbes qui sont nécessairement des droites.

Le procédé peut être appliqué aux courbes C^4,... mais tombe en défaut lorsque l'on trouve une solution λ_i, μ_i des congruences (1) telle que l'on ait $\lambda_i = \lambda_1 - 1$ ou $\mu_i = \mu_1 - 1$. Puisque $\lambda_1 > \mu_1$, c'est le premier cas qui se présente le premier.

Supposons donc $\lambda_i = \lambda_1 - 1$. On doit avoir

$$\lambda_1 - 1 + \alpha\mu_i = kp,$$

k étant un entier positif. Puisque la somme des multiplicités des courbes C^i aux points O, $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,\beta - 1)$ doit être égale à p, on a

$$\lambda_1 + \mu_i - 1 + (\beta - 1)(\lambda_1 - 1) = p.$$

On en déduit

$$\mu_i = (k - 1)p + \beta + \mu_i$$

et comme $\mu_i < p$, on a $k = 1$ et la solution des congruences (1)

$$\lambda_i = \lambda_1 - 1, \mu_i = \beta + \mu_1.$$

Observons que si l'on a $\mu_i + \beta\lambda_i = p$, on a

$$\lambda_i + \alpha\mu_i = (h + 1)p$$

car $\alpha\beta - 1 = hp$.

Si $\mu_k = \mu_1 - 1$, on trouve de même

$$\lambda_k = \alpha + \lambda_1.$$

On a d'ailleurs

$$\lambda_i + \mu_i < \lambda_k + \mu_k$$

de sorte que dans la suite des systèmes $| C^1 |, | C^2 |, \ldots, | C^\nu |$, on rencontre d'abord le système $| C^i |$.

5. Considérons donc le système $| C^i |$ dont les courbes passent $\lambda_1 + \mu_1 + \beta - 1$ fois par O et $\lambda_1 - 1$ fois par les points $(\alpha,1),(\alpha,2),\ldots,(\alpha,\beta - 1)$ car on a

$$\lambda_1 + \mu_1 + \beta - 1 + (\beta - 1)(\lambda_1 - 1) = p.$$

On ne peut plus reprendre le raisonnement précédent pour la suite des points $(\alpha,1),\ldots$, suite que nous désignerons dorénavant par *suite* A. Mais on peut le reprendre pour la suite $(\beta,1),\ldots$ que nous désignerons par *suite* B.

Trois cas peuvent se présenter suivant qu'il se détache de la *suite* B une seule suite de points ou deux suites de points. Dans le premier cas, la suite de points peut se terminer par un point (uni de première espèce) simple ou double pour les courbes C^i. Nous désignerons par P ce dernier point et envisagerons en premier lieu ce cas.

Nous supposerons que les courbes C^i passent $\beta + \mu_1$ fois par $(\beta,1),\ldots,(\beta,x)$, y fois par $(\beta,x + 1)$, $\mu_1 - 1$ fois par les points suivants. On doit avoir

$$\lambda_1 + \mu_1 + \beta - 1 + x(\beta + \mu_1) + y + (\alpha - 2 - x)(\mu_1 - 1) = p,$$

c'est-à-dire

$$x(\beta + 1) + y = \alpha + \mu_1.$$

Les courbes C^i passent $y - \mu_1 + 1$ fois par le point $(\alpha, x + 1, 1)$ et par une suite de points infiniment voisins successifs au précédent, le dernier de ces points étant P. Pour obtenir ces points, on doit effectuer les mêmes opérations que pour rechercher le plus grand commun diviseur $\beta + \mu_1$ et de $y - \mu_1 + 1$, la multiplicité des courbes C^i en P étant précisément ce plus grand commun diviseur. Si donc P est double, ce plus grand commun diviseur est égal à 2. Plaçons-nous dans ce cas. Alors le nombre $\beta + \mu_2$ est pair et les nombres β et μ_1 sont de même parité. D'autre part on a

$$\lambda_1 - 1 + \alpha(\beta + \mu_1) = p,$$

donc, p étant premier, $\lambda_1 - 1$ est impair et λ_1 est pair. On a ensuite

$$\lambda_1 + \beta\mu_1 = p,$$

donc $\beta\mu_i$ est impair et comme β et μ_i sont de même parité, ils sont impairs.

Posons $\beta = 2\beta' + 1, \lambda_1 = 2\lambda', \mu_1 = 2\mu' + 1$. Les nombres

$$\beta + \mu_1 = 2(\beta' + \mu' + 1), y - 2\mu'$$

doivent avoir pour plus grand commun diviseur 2, donc y est pair et nous poserons $y = 2y'$. Nous devons avoir

$$2x(\beta' + 1) + 2y' = \alpha + 2\mu' + 1,$$

donc α est impair. Nous poserons $\alpha = 2\alpha' + 1$.

Réciproquement, si α, β, μ_1 sont impairs et λ_1 pair, le point P est double pour les courbes C^i et O'_i est double conique pour la surface Φ_i.

La condition nécessaire et suffisante pour que le point O, multiple d'ordre $\lambda_1 + \mu_1$ pour la surface Φ soit suivi de points doubles biplanaires infiniment voisins successifs et enfin d'un point double conique, est que α, β, μ_1 soient impairs et λ_1 pair.

Si ces conditions ne sont pas remplies et s'il existe une seule suite de points qui se détache de la *suite* B, le point O'_i est simple pour la surface Φ_i.

6. Dans un travail antérieur, nous avons établi le théorème suivant:

Si λ_1, μ_1 *est la solution des congruences* (1) *telle que* $\lambda_1 + \mu_1$ *soit minimum, on a*

$$p = (2k + 1)\lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1, \; \alpha = (2k + 1)\lambda_1 + 1, \; \beta = (2k + 1)\mu_1 + 1.$$

et alors au point O, *multiple d'ordre* $\lambda_1 + \mu_1$ *pour la surface* Φ, *sont infiniment voisins successifs k points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire, ou*

$$p = 2(k+1)\lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1, \quad \alpha = 2(k+1)\lambda_1 + 1,$$
$$\beta = 2(k+1)\mu_1 + 1$$

et au point O *sont infiniment voisins successifs* $k - 1$ *points doubles biplanaires suivis d'un point double conique.*

Il est bien entendu que les nombres λ_1, μ_1 et k doivent être choisis de manière que p soit un nombre premier.

Dans le cas qui vient d'être étudié, où P est double pour les courbes C^i, λ_1 doit être pair et μ_1 impair. Posons dans les secondes formules précédentes, $\lambda_1 = 2\lambda'$, $\mu_1 = 2\mu' + 1$. On obtient

$$p = 4(k+1)\lambda'(2\mu'+1) + 2(\lambda'+\mu') + 1,$$
$$\alpha = 4(k+1)\lambda' + 1,$$
$$\beta = 2(k+1)(2\mu'+1) + 1.$$

On doit avoir (n° 4)

$$x(\beta + 1) + y = \alpha + \mu_1,$$

qui devient

$$2x[(k+1)(2\mu'+1) + 2] + y = 4(k+1)\lambda' + 2\mu' + 2.$$

On en déduit que y est pair. Dans ces conditions, le plus grand commun diviseur de

$$\beta + 1, \; y - \mu_1 + 1$$

c'est-à-dire de

$$2(k+1)(2\mu'+1) + 2\mu' + 2, \; y - 2\mu'$$

est égal à 2. On a donc le théorème suivant:

Si λ_1 *est pair et* μ_1 *impair, le point* O *multiple d'ordre* $\lambda_1 + \mu_1$ *pour la surface* Φ *est suivi d'une suite de points doubles biplanaires suivis d'un point double conique, le nombre p étant premier et donné par les formules* (3).

7. Sur la surface Φ_{i-1} se trouvent quatre courbes rationnelles: la courbe σ_α d'ordre $\lambda_1 - 1$, la courbe σ_β d'ordre $\mu_1 - 1$ et deux droites

$\rho_{\alpha\, i-1}$, $\rho_{\beta\, i-1}$ qui représentent les points simples, unis de première espèce, communs aux courbes C_{i-1}, distincts donc des points $(\alpha,\beta - 1)$, $(\beta,\alpha - 1)$. Les plans $O'_{i-2}\rho_{\alpha\, i-1}$ $O'_{i-2}\rho_{\beta\, i-1}$ sont les plans tangents en O'_{i-2} à la surface Φ_{i-2}. Placées dans l'ordre σ_α, $\rho_{\alpha\, i-1}$, $\rho_{\beta\, i-1}$, σ_β, chacune de ces courbes rencontre en un point la suivante et la précédente mais ne rencontre pas les autres. Les droites $\rho_{\alpha\, i-1}$, $\rho_{\beta\, i-1}$ se rencontrent en un point O'_{i-1}.

Lorsque l'on projette de O'_{i-1} la surface Φ_{i-1} sur la surface Φ_i, les courbes σ_α et σ_β sont projetées suivant des courbes σ_α et σ_β de mêmes ordres. Les droites $\rho_{\alpha\, i-1}$ et $\rho_{\beta\, i-1}$ sont projetées en des points de σ_α,σ_β respectivement. Le cône tangent à Φ_{i-1} en O'_{i-1} contient ces droites et par conséquent ce cône rencontre Φ_i suivant une courbe rencontrant σ_α et σ_β suivant les points dont il vient d'être question.

Si le point P est double pour les courbes C^i, il correspond à son domaine sur Φ_i une conique $\rho_{\beta i}$ qui rencontre chacun des courbes σ_α,σ_β en un point.

Si au contraire le point P est simple pour les courbes C^i, il correspond sur Φ_i au domaine de O'_{i-1} une droite $\rho'_{\beta i}$ qui rencontre en un point les courbes σ_α et σ_β. Le point O'_{i-1} est simple pour Φ_{i-1} et le point O'_{i-2} est double biplanaire pour Φ_{i-1}.

Observons que les courbes C^{i+1} ont en O la multiplicité

$$\lambda_{i+1} + \mu_{i+1} > \lambda_1 + \mu_1 + \beta - 1$$

et que par conséquent elles ne peuvent plus passer $\lambda_2 - 1$ fois par $(\beta,\alpha - 1)$. Il en résulte que la surface Φ_{i+2} est la projection de la surface Φ_i à partir d'un point O''_i appartenant à la courbe σ_α. Comme les points de cette courbe sont tous simples pour la courbe, cette courbe est projetée du point O''_i sur Φ_{i+1} suivant une courbe σ_α d'ordre $\lambda_1 - 2$

Aux courbes C^{i+1} correspondent sur la surface Φ_{i-1} des sections de la surface par les hyperplans passant par O'_{i-1} et touchant la courbe σ_α au point de rencontre de cette courbe avec la droite $\rho_{\alpha\, i-1}$. Il en résulte que le point O'_i n'est autre que la projection du point de rencontre de cette droite avec σ_α sur Φ_i. Ce point appartient donc à la conique $\rho_{\beta i}$ ou à la droite $\rho'_{\beta i}$ suivant les cas. Sur la surface Φ_{i+1} la conique $\rho_{\beta i}$ est projetée suivant une droite et la droite $\rho'_{\beta i}$ suivant un point.

On observera que le point O_i'' peut avoir une certaine multiplicité pour la surface Φ_i comme le montre certains exemples.

8. Supposons maintenant qu'il se détache deux suites de la suite B, ces suites se terminant par des points P_1,P_2 unis de première espèce et simples pour les courbes C^i. Aux domaines de ces points correspondent sur la surface Φ_i deux droites $\rho_{\beta i}$ et $\rho'_{\beta i}$ dont l'une, par exemple $\rho'_{\beta i}$ rencontre la courbe σ_α en un point que nous avons appelé tantôt O_i''. Il suffit pour le voir de reprendre les raisonnements faits au paragraphe précédent. On en conclut que sur la surface Φ_{i+1}, la droite $\rho_{\beta i}$ est projetée suivant une droite $\rho_{\beta i}$ et la droite $\rho'_{\beta i}$ suivant un point.

On déduit de ce qui précède que les courbes C^{i+1} passent simplement par le point P_1. Dans ces conditions on connaîtra ce point en partant des solutions de l'équation

$$\lambda_{i+1} + \mu_{i+1} + x\mu_{i+1} + y + (\alpha - 2 - x)(\mu_1 - 1) = p.$$

Cette équation n'admet pas de solution x,y si l'on a

$$\lambda_{i+1} = \alpha + \lambda_1, \ \mu_{i+1} = \mu_1 - 1,$$

car dans ce cas les courbes C^{i+1} ont la multiplicité $\mu_1 - 1$ en tous les points de la *suite* B.

Dans ces conditions, le point P_1 n'existe pas et on retombe dans l'hypothèse étudiée précédemment.

Observons que l'on a alors

$$p = \lambda_i + \beta\mu_i = \mu_{i+1} + \alpha\lambda_{i+1},$$

d'où

$$\lambda_1(\beta - 1) = \mu_1(\alpha - 1).$$

On en déduit

$$\frac{\alpha - 1}{\lambda_1} = \frac{\beta - 1}{\mu_1},$$

d'où $\alpha = t\lambda_2 + 1, \beta = t\mu_2 + 1$, où $t = 2k + 1$ ou $2k + 2$ suivant que P_2 est simple ou double pour les courbes C^i.

9. Nous avons supposé $\mu_1 > 1$. Le cas $\mu_1 = 1$ se traite d'une manière analogue aux précédents.

Si $\mu_1 = 1$, on a $\lambda_1 = p - \alpha$. Les courbes C^1 passent $\lambda_1 + 1$ fois par O, λ_1 fois par les points $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,\beta - 1)$, une fois par les points $(\beta,1),\ldots,(\beta,\alpha - 1)$. Les courbes C^2 ne peuvent plus passer par le point $(\beta,\alpha - 1)$. Supposons qu'elles passent μ_2 fois par $(\beta,1),\ldots,$ (β,x),y fois par $(\beta,\alpha + 1)$. On doit avoir

$$\lambda_2 + \mu_2 + x\mu_2 + y = p$$

et les courbes C^2 passent $\mu_2 - y$ fois par le point $(\beta,x + 1,1)$ et par une suite de points infiniment voisins successifs se terminant par un point uni de première espèce, simple pour les courbes C^2.

Sur la surface Φ_1, on a une courbe σ_α d'ordre $\lambda_1 - 1$ et une droite σ_β. Sur la surface Φ_2, on a une courbe σ_α d'ordre $\lambda_1 - 1$ et, une droite $\rho_{\beta 1}$ et éventuellement une droite $\rho_{\alpha 1}$.

La recherche se conduira ensuite de la même manière que précédemment.

Le cône tangent en O' à la surface Φ se compose d'un cône d'ordre λ_1 et d'un plan rencontrant le cône suivant une droite. Le point O'_1 est donc au plus double pour la surface Φ_2.

10. Nous allons maintenant construire des exemples des différents cas qui viennent d'être étudiés de manière à prouver leur existence. Nous commencerons par le cas où la suite des points doubles infiniment voisins successifs de 0 se termine par un point double conique.

Nous supposerons donc

$$\alpha = 2\alpha' + 1, \ \beta = 2\beta' + 1$$

et poserons

$$\lambda_1 = \alpha', \ \mu_1 = \beta'.$$

Nous avons

$$\alpha\beta - 1 = 2(2\alpha'\beta' + \alpha' + \beta') = hp,$$

et comme nous devons avoir $\alpha'\beta' - 1$ multiple de p, on a $h = 2$.

Les courbes C^1 passent $\alpha' + \beta'$ fois par O, α' fois par $(\alpha,1),\ldots,$ $(\alpha,\beta - 1)$, β' fois par $(\beta,1),\ldots,(\beta,\alpha - 1)$.

Les courbes que nous avons appelées C^i sont données par

$$\lambda = \alpha' - 1, \ \mu = \beta' + \beta = 3\beta' + 1.$$

On a

$$\alpha' + 3\beta' + x(3\beta' + 1) + y + (2\alpha' + 1 - x)(\beta' - 1) = p,$$

c'est-à-dire

$$x(\beta' + 1) + y = 2\alpha' - \beta' - 1.$$

Nous avons établi que $\mu = \beta'$ devait être impair. Posons donc $\beta' = 2\beta'' + 1$. Nous avons

$$2x(\beta'' + 1) + y = 2\alpha' - 2\beta'' - 2$$

et y est pair. Le plus grand commun diviseur de $3\beta' + 1 = 6\beta'' + 4$ et de $y - \beta' - 1 = y - 2\beta'' - 2$ est donc pair et nécessairement égal à 2. Le point O'_i est donc double conique pour la surface Φ_{i-1}, En général on a d'ailleurs $i = 2$.

11. Traitons un second cas analogue en posant

$$p = 191, \ \alpha = 37, \ \beta = 31.$$

On a $\lambda_1 = 6$ et $\mu_1 = 5$. Les courbes C^1 passent 11 fois par O, 6 fois par $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,30)$, 5 fois par $(\beta,1),\ldots,(\beta,36)$. La surface Φ_2 contient deux courbes rationnelles $\sigma_\alpha^6,\sigma_\beta^5$ se rencontrant au point O'_1. Si n est d'ordre de la surface Φ,Φ_1 est d'ordre $n - 11$.

Les courbes C^2 passent 22 fois par O, 12 fois par $(\alpha,1),(\alpha,2)$, 10 fois par $(\alpha,3)$, 5 fois par $(\alpha,4),\ldots,(\alpha,30)$, 2 fois par $(\alpha,3,1),(\alpha,3,1,1)$, une fois par $(\alpha,3,1,2),(\alpha,3,1,2,1)$, 10 fois par $(\beta,1),(\beta,2),(\beta,3),(\beta,4)$, 5 fois par $(\beta,5),\ldots,(\beta,36)$, une fois par $(\beta,5,1),\ldots,(\beta,5,5)$.

La surface Φ_2 est d'ordre $n - 13$, le point O'_1 est double biplanaire pour la surface Φ_1. Sur la surface Φ_2 sont tracées deux courbes $\sigma_\alpha^5,\sigma_\beta^4$ et deux droites $\rho_{\alpha 1},\rho_{\beta 1}$. Si on les range dans l'ordre $\sigma_\alpha^5,\rho_{\alpha 1},\rho_{\beta 1},\sigma_\beta^4$, chaque courbe rencontre la précédente et la suivante en un point mais ne rencontre pas les autres.

Les courbes C^3 passent 33 fois par O, 13 fois par $(\alpha,1)$, 5 fois par $(\alpha,2),\ldots,(\alpha,30)$, 5 fois par $(\alpha,1,1)$, 3 fois par $(\alpha,1,1,1)$, 2 fois par $(\alpha,1,1,1,1)$, une fois par $(\alpha,1,1,1,1,1)$, $(\alpha,1,1,1,1,2)$, 15 fois par $(\beta,1)$, 7 fois par $(\beta,2)$, 4 fois par $(\beta,3),\ldots,(\beta,36)$, 3 fois par $(\beta,2,1)$, $(\beta,2,2)$, 2 fois par $(\beta,2,2,1)$, une fois par $(\beta,2,3,1)$, $(\beta,2,3,1,1)$.

La surface Φ_3 est d'ordre $n - 15$ et le point O'_2 est double biplanaire pour Φ_2. Sur la surface Φ_3 sont tracées deux courbes $\sigma_\alpha^5,\sigma_\beta^4$ et deux droites $\rho_{\alpha 1},\rho_{\beta 1}$. Si on les range dans l'ordre $\sigma_\alpha^5,\rho_{\alpha 2},\rho_{\beta 2},\sigma_\beta^4$, chaque courbe rencontre la précédente et la suivante en un point mais ne rencontre pas les autres.

Les courbes C^4 passent 41 fois par O, 5 fois par les points $(\alpha,1)$,

$\ldots,(\alpha,30)$, 10 fois par $(\beta,1)$, 4 fois par $(\beta,2),\ldots,(\beta,36)$, 6 fois par $(\beta,1,1)$, $\ldots,(\beta,1,4)$, 2 fois par $(\beta,1,5),(\beta,1,5,1),(\beta,1,5,2)$.

Au domaine de ce dernier point correspond sur Φ_4 une conique ρ_β. Cette surface est d'ordre $n - 17$ et le point O'_3 est double conique pour la surface Φ_3.

Sur la surface Φ_4 sont tracées les courbes $\sigma^5_\alpha,\sigma^4_\beta$ et une conique ρ_β qui rencontre en un point chacune des courbes précédentes.

Le point O′ *est multiple d'ordre* 11 *pour la surface* Φ *et il existe trois points doubles infiniment voisins successifs de* O′, *les deux premiers sont biplanaires et le dernier est conique.*

On peut observer que les courbes C^5 passent 44 fois par O, 24 fois par le point $(\alpha,1)$, 11 fois par $(\alpha,2)$, 4 fois par $(\alpha,3),\ldots,(\alpha,30)$, 7 fois par $(\alpha,2,1)$, 6 fois par $(\alpha,2,3)$, une fois par $(\alpha,2,2,1)$, $(\alpha,2,2,1,1),\ldots,$ $(\alpha,2,2,1,5)$. 7 fois par $(\beta,1)$, 4 fois par $(\beta,2),\ldots,(\beta,36)$, 3 fois par $(\beta,1,1)$, $\ldots,(\beta,1,4)$, une fois par $(\beta,1,5),(\beta,1,5,1),(\beta,1,5,2)$.

La surface Φ_5 est d'ordre $n - 20$, elle est la projection de Φ_4 à partir du point O''_4 qui est triple pour cette surface.

12. Nous allons maintenant considérer un exemple où le point O'_{i-1} est simple pour la surface Φ_i.

Nous supposerons $p = 67$, $\alpha = 21$, $\beta = 16$. On a alors $\lambda_1 = 4$, $\mu_1 = 3$ et les courbes C^1 passent 7 fois par O, 4 fois par $(\alpha,1),\ldots,$ $(\alpha,15)$ et 3 fois par les points $(\beta,1),\ldots,(\beta,20)$. Si n est l'ordre de la surface Φ, la surface Φ_2 est d'ordre $n - 7$ et contient deux courbes $\sigma^4_\alpha,\sigma^3_\beta$ se rencontrant en un point O'_1.

Les courbes C^2 passent 14 fois par O, 8 fois par $(\alpha,1)$, 6 fois par $(\alpha,2)$, 3 fois par $(\alpha,3),\ldots,(\alpha,15)$, 2 fois par $(\alpha,2,1)$, une fois par $(\alpha,2,1,1)$ et $(\alpha,2,1,1,1)$, 6 fois par $(\beta,1),(\beta,2),(\beta,3)$, 3 fois par $(\beta,4)$, 2 fois par $(\beta,5),\ldots,(\beta,20)$, une fois par $(\beta,4,1),(\beta,4,2)$ et $(\beta,4,3)$.

La surface Φ_2 est d'ordre $n - 9$ et contient deux courbes et deux droites

$$\sigma^3_\alpha,\rho_{\alpha 1},\rho_{\beta 1},\sigma^2_\beta,$$

chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point mais ne rencontrant pas les autres. Le point O'_1 est double biplanaire pour la surface Φ_1.

Les courbes C^3 passent 21 fois par O et 4 fois par $(\alpha,1)$, 3 fois par $(\alpha,2),\ldots,(\alpha,15)$, une fois par $(\alpha,1,1),\ldots,(\alpha,1,8)$, 8 fois par $(\beta,1)$, 2 fois par $(\beta,2),\ldots,(\beta,20)$, 1 fois par $(\beta,1,1),(\beta,1,1,1),\ldots,(\beta,1,1,5)$.

Sur la surface Φ_3, d'ordre $n - 11$, se trouvent les courbes $\sigma_\alpha^3,\rho_{\alpha 2}$, $\rho_{\beta 2},\sigma_\beta^2$ présentant le même dispositif que les courbes situées sur Φ_1. Le point O'_2 est double biplanaire pour la surface Φ_2.

Les courbes C^4 passent 22 fois par O, 3 fois par $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,15)$, 7 fois par $(\beta,1)$, 2 fois par $(\beta,2),\ldots,(\beta,20)$, 5 fois par $(\beta,1,1)$, $(\beta,1,2)$, 2 fois par $(\beta,1,3),(\beta,1,3,1)$, une fois $(\beta,1,3,2),(\beta,1,3,2,1)$.

Au domaine de ce dernier point correspond sur la surface Φ_4 une droite $\rho_{\beta 3}$ et le point O'_3 est simple pour la surface Φ_3. Sur Φ_4 se trouvent les courbes $\sigma_\alpha^3,\rho_{\beta 3}$ et σ_β^2. La droite $\rho_{\beta 3}$ rencontre les courbes σ_α^3 et σ_β^2.

Le point O' est multiple d'ordre sept pour la surface Φ et possède deux points doubles biplanaires infiniment voisins successifs dont le dernier est ordinaire.

13. Nous allons reprendre maintenant un exemple déjà considéré dans notre *théorie des involutions cycliques.* Nous supposerons $p = 83$, $\alpha = 26$, $\beta = 13$. Nous avons $\lambda_1 = 5$, $\mu_1 = 3$ et les courbes C^1 passent 8 fois par O, 5 fois par $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,15)$, 3 fois par $(\beta,1),\ldots,(\beta,25)$. Si la surface Φ est d'ordre n, la surface Φ_1 est d'ordre $n - 8$ et contient deux courbes rationnelles: une quintique σ_α^5 et une cubique gauche σ_β^3 se rencontrant en un point O'_1.

Les courbes C^2 passent 16 fois par O, 10 fois par $(\alpha,1)$, 5 fois par $(\alpha,2)$, 4 fois par $(\alpha,3),\ldots,(\alpha,15)$, une fois par $(\alpha,2,1),\ldots,(\alpha,2,5)$, 6 fois par $(\beta,1),(\beta,2),(\beta,3),(\beta,4)$, 3 fois par $(\beta,5)$, 2 fois par $(\beta,6),\ldots,(\beta,25)$, une fois par $(\beta,5,1),(\beta,5,2),(\beta,5,3)$.

La surface Φ_2 est d'ordre $n - 10$ et contient deux courbes $\sigma_\alpha^4,\sigma_\beta^2$ et deux droites $\rho_{\alpha 1},\rho_{\beta 1}$ présentant le dispositif habituel. Le point O'_1 est double biplanaire pour Φ_1.

Les courbes C^3 passent 23 fois par O, 4 fois par $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,15)$ et 10 fois par $(\beta,1)$, 4 fois par $(\beta,2)$, 2 fois par $(\beta,3),\ldots,(\beta,25)$, une fois par $(\beta,1,1),\ldots,(\beta,1,1,9)$, 2 fois par $(\beta,2,1),(\beta,2,2)$, une fois par $(\beta,2,3)$, $(\beta,2,3,1)$.

Aux domaines des points $(\beta,1,9)$ et $(\beta,2,3,1)$ correspondent sur la surface Φ_3 respectivement deux droites $\rho_{\beta 2},\rho'_{\beta 2}$ dont l'une rencontre σ_α^4 en un point O''_3.

Le point O'_2 est double biplanaire pour Φ_2.

Les courbes C^4 passent 24 fois par O, 15 fois par $(\alpha,1)$, 5 fois par $(\alpha,2)$, 3 fois par $(\alpha,3),\ldots,(\alpha,15)$, 2 fois par $(\alpha,2,1),\ldots,(\alpha,2,5)$, 9 fois par

$(\beta,1)$, 4 fois par $(\beta,2)$, 2 fois par $(\beta,3),\ldots,(\beta,25)$, 2 fois par $(\beta,2,1)$, $(\beta,2,2)$, une fois par $(\beta,2,3),(\beta,2,3,1)$.

Sur la surface Φ_4, on a deux courbes $\sigma_\alpha^3,\sigma_\beta^2$, une conique correspondant au domaine du point $(\alpha,2,5)$ et une droite $\rho'_{\beta 2}$. C'est donc la droite $\rho_{\beta 2}$ qui sur Φ_3 passait par le point O_3''. Ce point est double conique pour cette surface. On remarquera que la conique représentant le domaine de $(\alpha,2,5)$ est birationnellement indentique à la droite $\rho_{\alpha 1}$.

Le point O' est multiple d'ordre huit pour la surface Φ et possède deux points doubles biplanaires infiniment voisins successifs dont le dernier est ordinaire.

14. Nous terminerons en traitant un exemple où le point O_1' est double conique pour la surface Φ_1 mais où la surface Φ_4 possède un point quadruple.

Nous prendrons $p = 31$, $\alpha = 9$, $\beta = 7$ d'où $\lambda_1 = 4$ et $\mu_1 = 3$.

Les courbes C^1 passent 7 fois par O, 4 fois par $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,6)$, 3 fois par $(\beta,1),\ldots,(\beta,8)$. Sur la surface Φ_1 on a deux courbes $\sigma_\alpha^4,\sigma_\beta^3$ se rencontrant en un point O_1'. Cette surface a l'ordre $n - 7$, n étant l'ordre de Φ.

Les courbes C^2 passent 13 fois par O, 3 fois par $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,6)$, 4 fois par $(\beta,1)$, 2 fois par $(\beta,2),\ldots,(\beta,8)$, 2 fois par $(\beta,1,1),(\beta,1,2)$, $(\beta,1,3)$. Au domaine de ce point correspond sur la surface Φ_1 une conique $\rho_{\beta 2}$. La surface contient deux courbes $\sigma_\alpha^3,\sigma_\beta^2$. Le point O_1' est double conique pour la surface Φ_1.

Le point O est multiple d'ordre sept pour la surface Φ et possède un point double conique infiniment voisin.

La surface Φ_2 est d'ordre $n - 9$.

Les courbes C^3 passent 14 fois par O et 7 fois par $(\alpha,1)$, 2 fois par $(\alpha,2),\ldots,(\alpha,6)$, une fois par $(\alpha,1,1),(\alpha,1,1,1),\ldots,(\alpha,1,1,4)$, 3 fois par $(\beta,1)$, 2 fois par $(\beta,2,\ldots,(\beta,8)$, une fois par $(\beta,1,1),(\beta,1,2),(\beta,1,3)$.

Sur la surface Φ_3 on a deux coniques $\sigma_{\alpha 2},\sigma_{\beta 2}$, une droite $\rho_{\alpha 2}$ représentant le domaine du point $(\alpha,1,1,4)$ et une droite $\rho_{\beta 1}$ projection de la conique $\rho_{\beta 1}$ à partir d'un point O_2'' commun à σ_α^3 et à la conique $\rho_{\beta 1}$. Ce point est simple pour Φ_2 et la surface Φ_3 est d'ordre $n - 10$,

Les courbes C^4 passent 15 fois par O, 6 fois par $(\alpha,1)$, 2 fois par $(\alpha,2),\ldots,(\alpha,6)$, 4 fois par $(\alpha,1,1)$, 3 fois par $(\alpha,1,2)$, une fois par $(\alpha,1,2,1)$. $(\alpha,1,2,2),(\alpha,1,2,3)$, 2 fois par $(\beta,1),\ldots,(\beta,8)$.

Au domaine du point $(\alpha,1,2,3)$ correspond sur la surface Φ_4 une droite $\rho_{\alpha 3}$ et on a sur cette surface deux coniques $\sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2$. La surface Φ_4 est d'ordre $n - 11$ et le point O_3'' commun à σ_α^2 et $\rho_{\alpha 3}$ est simple pour Φ_3.

Les courbes C^5 passent 19 fois par O et deux fois par $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,6)$. Elles passent en outre 5 fois par $(\beta,1)$, une fois par $(\beta,2),\ldots,(\beta,8)$, 4 fois par $(\beta,1,1),(\beta,1,2),(\beta,13)$. Sur la surface Φ_5 il correspond à ce point une quartique qui correspond point par point à la droite $\rho_{\beta 1}$. On en conclut que le point O_4'', centre de projection de Φ_4 sur Φ_5, commun à σ_β^2 et $\rho_{\alpha 3}$, est quadruple pour la surface Φ_4. La surface Φ_5 est d'ordre $n - 15$.

Liège, décembre 1971.