Bulletin de la Classe des sciences

Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple (4e note)

Lucien Godeaux

Résumé
Résultats nouveaux concernant les points de diramation de seconde espèce et de seconde catégorie appartenant à une surface multiple d'ordre premier p > 2, le cône tangent en ce point à la surface se décomposant en trois cônes rationnels.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie
(quatrième note)

Résumé. — Résultats nouveaux concernant les points de diramation de seconde espèce et de seconde catégorie appartenant à une surface multiple d'ordre premier $p > 2$, le cône tangent en ce point à la surface se décomposant en trois cônes rationnels.

Dans la seconde de nos notes précédentes [1], nous avons étudié les points de diramation d'une surface multiple d'ordre premier $p > 2$, le cône tangent en ce point à la surface se scindant en trois cônes rationnels.

Rappelons que cette surface représente une involution cyclique I d'ordre premier p n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous prenons comme modèle projectif de F une surface normale d'un espace projectif S_r à r dimensions sur laquelle l'involution I est déterminée par une homographie Θ de période p possédant p axes ponctuels dont un seul, σ_0, rencontre la surface en un nombre fini de points simples (les points unis de l'involution). Nous désignons par $|C|$ le système des sections de F par les hyperplans ne passant pas par σ_0. Le système $|C|$ appartient à l'involution, est dépourvu de points-base et si l'on rapporte projectivement ses courbes aux hyperplans d'un espace ayant la même dimension que $|C|$, il correspond à F une surface Φ normale.

[1] Les premières notes ont paru dans le Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1972, pp. 6-22, 158-170, 171-178. La note actuelle fait suite à la seconde note.

Si O est un point uni de l'involution, nous désignons par $| C^1 |$ le système des courbes C passant par O. Le plan tangent ω en O à la surface F est transformé en soi par l'homographie Θ et ce plan contient donc une involution cyclique I' d'ordre p dont O est un point uni isolé. La structure du point uni O considéré sur la surface F et celle du même point considéré sur le plan ω sont identiques comme M. B. Segre l'a démontré (1). Nous utiliserons cette propriété dans la suite de cette note.

1. Rappelons qu'à un point uni O de l'involution I d'ordre premier p sont attachés deux nombres α, β, entiers compris entre 1 et p. On a d'ailleurs

$$\alpha\beta - 1 = tp.$$

Le point uni O étant de seconde catégorie, on a

$$p = a\beta + b, (b < \beta), a + b\alpha = hp, (h > 1)$$

les nombres $\lambda = a$, $\mu = b$ étant la solution des congruences équivalentes

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \; \mu + \; \beta\lambda \equiv 0, \; (\text{mod. } p) \qquad (1)$$

telle que $a + b$ soit plus petite que toute somme des solutions en nombres entiers positifs de ces congruences.

Nous avons

$$\alpha p = a\alpha\beta + \alpha b = a(tp + 1) + hp - a$$

et on en déduit

$$\alpha = at - h.$$

Nous avons en outre

$$h\beta p = a\beta + \alpha\beta b = p - b + b(tp + 1)$$

et par suite

$$h\beta = tb + 1.$$

2. Posons

$$p = a'\alpha + b'. \quad (b' < \alpha)$$

nous avons d'ailleurs $a' + b' > a + b$.

(1) B. Seghe, *Some proprieties of differentiable Varieties and Transformations* (Ergebnisse der Mathematik, Berlin, Springer, 1971). On remarquera que dans la recherche de la structure des points unis des involutions cycliques, dans notre ouvrage *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Cremonese, 1963), nous ne nous sommes pas préoccupé de la nature de la surface algébrique support de l'involution.

Nous avons établi les relations

$$\left.\begin{aligned} b &= a' + (\mathrm{H} + \mathrm{H}')m, \\ b' &= a + (x + 1)(\mathrm{H} + \mathrm{H}')m + \mathrm{H}', \end{aligned}\right\} (2)$$

ou H et H′ sont deux entiers positifs premiers entre eux et m un entier positif que l'on obtient de la manière suivante:

Les courbes C passant par O, c'est-à-dire les courbes C^1, ont en O la multiplicité $a + b$ et passent a fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \cdots, (\alpha, \beta - 1)$, b fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 2), \cdots, (\beta, x)$, $a' + \mathrm{H}'m$ fois par le point $(\beta, x + 1)$, a' fois par les points $(\beta, x + 2), \cdots, (\beta, \alpha - 1)$, et par une suite de points infiniment voisins successifs du point $(\beta, x + 1)$ se terminant en un point multiple d'ordre m pour les courbes C^1.

Des relations (2) on déduit

$$p = a'\alpha + b' = b - \alpha - \alpha(\mathrm{H} + \mathrm{H}')m + a + (x + 1)(\mathrm{H} + \mathrm{H}')m + \mathrm{H}'m,$$

d'où

$$(h - \alpha)p = (\alpha - x - 1)(\mathrm{H} + \mathrm{H}')m - \mathrm{H}'m.$$

On en déduit que m est un diviseur de $h - 1$. Les équations (2) montrent que m divise aussi $b - a'$ et $b' - a$, donc:

Le nombre m divise les nombres $b - a'$, $b' - a$ et $h - 1$.

3. L'homographie Θ détermine dans le plan tangent ω à F en O une homographie non homologique dont les équations peuvent s'écrire

$$x_0' : x_1' : x_2' = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^\alpha x_2,$$

où, en posant $\eta = \varepsilon^\alpha$, sous la forme

$$x_0 : x_1 : x_2 = x_0 : \eta^\beta x_1 : \eta x_2,$$

le point O étant donné par $x_1 = x_2 = 0$ et ε étant une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Dans le plan ω, cette homographie engendre une involution I′ d'ordre p n'ayant qu'un nombre fini de points unis.

Comme M. B. Segre l'a démontré, la structure du point uni O pour l'involution I sur la surface F est identique à celle du point uni O pour l'involution I′ dans le plan ω. Nous allons étudier cette seconde structure.

Le système des courbes d'ordre p dans le plan ω contient p systèmes linéaires composés au moyen de l'involution I'. L'un d'eux est privé de points-base et, si l'on pose $p = 2\nu + 1$, a la dimension $\nu + 2$. Ce système, que nous désignerons par $| C' |$, a pour équation

$$l_0 x_0^p + \Sigma l_i x_0^{p-\lambda-\mu} x_1^\lambda x_2^\mu = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, \nu + 2)$$

Dans cette équation, le coefficient de l_1 s'obtient en posant $\lambda = a, \mu = b$, le coefficient de l_i étant obtenu en posant $\lambda = \lambda_i$, $\mu = \mu_i$, les entiers λ_i, μ_i étant une solution des congruences (1) et les sommes $\lambda_i + \mu_i$ étant rangées en nombres croissants. De plus, on a $\lambda_i + \mu_i \leqslant p$. L'équation contient les termes

$$l_{\nu+1} x_1^p, \, l_{\nu+2} x_2^p,$$

Les courbes C' passant par O s'obtiennent en posant $l_0 = 0$. Nous les désignerons par C^l, aucune confusion n'étant possible. Le système $| C^1 |$ a pour équation

$$l_1 x_0^{p-a-b} x_1^a x_2^b + \Sigma l_i x_0^{p-\lambda-\mu} x_1^\lambda x_2^\mu = 0.$$

4. La transformatiou quadratique T d'équations

$$x_0 : x_1 : x_2 = y_0^2 : y_0 y_1 : y_1 y_2$$

fait correspondre au point $(\beta, 1)$, infiniment voisin de 0 sur la droite unie $x_1 = 0$ le point $y_1 = y_2 = 0$. Aux courbes C^l, elle fait coirespondre les courbes

$$l_1 y_0^{2(p-b)-a} y_1^{a+b} y_2^b + \Sigma l_i y_0^{2(p-\mu)-\lambda} y_1^{\lambda+\mu} y_2^\mu = 0$$

ou, après suppression du facteur y_1^{a+b},

$$l_1 y_0^{2(p-b)-a} y_2^b + \Sigma l_i y_0^{2(p-\mu)-\lambda} y_1^{\lambda+\mu-(a+b)} y_2^h = 0,$$

qui montre que le point $(\beta, 1)$ est bien multiple d'ordre b pour les courbes.

A l'homographie Θ, T fait correspondre l'homographie Θ' d'équations

$$y'_0 : y'_1 : y'_2 = y_0 : \varepsilon y_1 : \varepsilon^{\alpha+1} y_2,$$

ou

$$y'_0 : y'_1 : y'_2 = y_0 : \eta^\beta y_1 : \eta^{\beta+1} y_2.$$

Le système $|C^1|$ est transformé en soi par l'homographie Θ, donc le système qui lui correspond par T doit être transformé en soi par l'homographie Θ'. Cela donne deux congruences

$$\begin{aligned} &(\alpha+1)(\mu_i-b)+\lambda_i-a\equiv 0, \\ &(2\beta+1)(\mu_i-b)+\beta(\lambda_i-a)\equiv 0, \end{aligned} \quad (\text{mod. } p)$$

valables pour $i = 2, 3, \cdots, \nu + 2$.

Ces congruences ne sont pas indépendantes car en multipliant les deux membres de la première par α (ou ceux de la seconde par β) on retrouve la seconde (ou la première) en utilisant la relation $\alpha\beta = tp + 1$.

5. Conservons les notations introduites dans le cas de la surface F, ce qui ne peut prêter à confusion.

Effectuons k fois la transformation T, c'est-à-dire la transformation T^k d'équations

$$x_0 : x_1 : x_2 = y_0^k : y_0^{k-1} y_1 : y_1^{k-1} y_2$$

qui fait correspondre au point $(\beta, k-1)$ le point $y_1 = y_2 = 0$.

Aux courbes C^1 correspondent les courbes

$$l_1 y_0^{k(p-b)-a} y_1^{a+(k-1)b} y_2^b + \Sigma\lambda_i y_0^{k(p-\mu)-\lambda} y_1^{\lambda+(k-1)\mu} y_2^\mu = 0.$$

Les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, $\cdots$, (β, x) étant multiples d'ordie b pour les courbes C^l, cette équation peut être simplifiée par $y_1^{a+(k-1)b}$. On obtient ainsi l'équation

$$l_1 y_0^{k(p-b)-a} y_2^b + \Sigma\lambda_i y_0^{k(p-\mu)-\lambda} y_1^{\lambda+(k-1)\mu} y_2^\mu = 0.$$

A l'homographie Θ correspond une homographie Θ'' dont les équations sont

$$y'_0 : y'_1 : y'_2 = y_0 : \varepsilon y_1 : \varepsilon^{a+k-1} y_2$$

ou

$$y'_0 : y'_1 : y'_2 = y_0 : \eta^\beta y_1 : \eta^{(k-1)\beta+1} y_2.$$

Les courbes (3) doivent être transformées en elles-mêmes par Θ'', ce qui donne les congruences

$$\begin{aligned} &(\alpha+2k-2)(\mu_i-b)+\lambda_i-a\equiv 0, \\ &(k\beta+1)(\mu_i-b)+\beta(\lambda_i-a)\equiv 0. \qquad (\text{mod. } p) \\ &(i=2,3,\cdots,x) \end{aligned}$$

On doit de plus avoir

$$k(p - b) - a > k(p - \lambda_2) - \mu_2 > \cdots > k(p - \mu_x) - \lambda_x.$$

6. Supposons maintenant $k = x + 2$. Au point $(\beta, x + 1)$ correspond le point $y_1 = y_2 = 0$ et comme les courbes C^l passent b fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, $\cdots$, (β, x), l'équation de la courbe transformée doit pouvoir être divisée par y_1 à la puissance $a + (x + 1)\,b$. On obtient ainsi l'équation

$$l_1 y_0{}^{(x+z)(p-b)} y_2^b + \Sigma l_i y_0^{(x+z)(p-\mu)-\lambda} y_1^{\lambda-a+(x+1)(\mu-b)} y_2^{\mu} = 0.$$

Le coefficient de $l_{x+}1$ est obtenu en faisant $\lambda = \lambda_{x+1}$, $\mu = \mu_{x+}1$ dans le terme général de l'équation. Dans ce terme, le coefficient de y_0 est

$$y_1^{\mathrm{H}'m} y_2^{a'}$$

et l'exposant de y_0 doit être supérieur aux exposants de la même variable dans tous les termes de l'équation. On a donc

$$(x + 2)(b - \mu_{x+1}) > (x + 2)b - a,$$

c'est à dire

$$(x + 2)(b - \mu_{x+1}) > \lambda_{x+1} - a.$$

On a d'autre part

$$\lambda_{x+1} = a + \mathrm{H}'m - (x + 1)(\mu_{x+1} - b),$$

$$\mu_{x+1} = a'$$

et on en déduit

$$\lambda_{x+1} = a + \mathrm{H}'m + (x + 1)(b - a')$$

Ces relations sont vérifiées si l'on tient compte des valeurs de $b - a'$ et de $b' - a$ rappelées au début.

Les courbes transformées des courbes C^1 sont transformées en elles-mêmes par l'homographie Θ''. Cela donne les congruences

$$\begin{aligned} (\alpha + x + 1)(b - a'_{,}) &\equiv \mathrm{H}'m, \\ [(x + 1)\beta + 1](b - a') &\equiv \beta \mathrm{H}'m. \end{aligned} \qquad (\mathrm{mod.}\ p)$$

Ces relations sont une conséquence l'une de l'autre. Si l'on multiplie les deux membres de la pıemière par β (ou de la seconde par α), on retrouve la seconde (ou la première) en tenant compte de $\alpha\beta = tp + 1$.

7. Posons $k = x + 2 + z$. La transformation T^k fait alors correspondre au point $(\beta, x + 1 + z)$ le point $y_1 = y_2 = 0$.

Dans la transformée de l'équation des courbes C^1 par T^{x+2+x}, supposons que ce soit le coefficient de l_{x+l+z} dans lequel l'exposant de y_0 est le plus élevé. Dans ce terme

$$y_0 \text{ a l'exposant } (x + 2 + z)(p - \mu) + \lambda,$$

$$y_1 \text{ a l'exposant } \lambda + (x + 1 + z)\mu,$$

$$y_2 \text{ a l'exposant } \mu,$$

$$\text{où l'on fait } \lambda = \lambda_{x+1+z},\ \mu = \mu_{x+1+z}.$$

On sait que le terme en question contient y_2 avec l'exposant a'. Il faudrait donc que dans l'équation transformée, on puisse diviser par y_2 exposant $\mu_{x+1+z} - a'$. Or, l'équation des courbes C^l contient le terme x_1^p, dont le transformé par T^k est

$$y_0^{(k-1)p} y_1^p$$

qui ne contient pas y_2 quel que soit k. Donc notre hypothèse doit être rejettée. On voit facilement que le terme qui dans l'équation transformée contient y_0 à la plus haute puissance est celui de l_{x+1}. Il reste alors dans le terme

$$y_0 \text{ à la puissance } (x + 2 + z)(p - \mu_{x+1}) - \lambda_{x+1},$$

$$y_1 \text{ à la puissance } (x + 1 + z)(p - \mu_{x+1}) + \lambda_{x+1},$$

$$y_2 \text{ à la puissance } \mu_{x+1} = a'.$$

On doit donc avoir
$(x + 2 + z)(p - \mu_{x+1}) - \lambda_{x+1} > (x + 1 + z)(p - \mu_{x+1+z}) - \lambda_{x+1+z}$
c'est-à-dire

$$(x + 2 + z)(\mu_{x+1+z} - \mu_{x+1}) > \lambda_{x+1} - \lambda_{x+1+z}.$$

8. Dans la transformée de l'équations des courbes C^1, on peut mettre en facteur le nombre y_1 à la puissance

$$a + (x + 1 + z)b + H'm + a'z,$$

de sorte que dans le premier terme de l'équation, y_1 parait à la puissancc

$$(b - a')z - H'm.$$

Dans le coefficient de 1_{x+1+z}, le terme de y_1 doit disparaitre, de sorte que l'on a

$$\lambda_{x+1+z} + (x + 1 + z)\mu_{x+1+z} = a + (x + 1 + z)b + H'm + za',$$

c'est-à-dire

$$\lambda_{x+1+z} - a + (x + 1 + z)(\mu_{x+1+z} - b) = H'm + za',$$

pour $z = 1, 2, \cdots, \alpha - x - z$.

La transformée de l'équation des courbes C^1 étant transformée en soi par Θ'', on a les congruences

$$\begin{aligned} &(\alpha + x + 2z + 1)(b - a') \equiv H'm \\ &[(x + 1 + 2z)\beta + 1](b - a') \equiv \beta H'm. \end{aligned} \qquad (\text{mod. } p)$$

On montre, comme plus haut (n^{os} 4 et 6) que ces congruences ne sont pas indépendantes.

Liège, le 21 novembre 1972.