EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, N° 3, 1933

Remarque sur les surfaces donnant lieu, dans l'espace réglé, à une suite de Laplace terminée,

par LUCIEN GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

1. Soient (x) une surface de l'espace ordinaire S_3, rapportée à ses asymptotiques u, v,

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \qquad (L)$$

la suite de Laplace associée à cette surface dans un espace S_5, les points U, V représentant les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} à la surface (x) sur l'hyperquadrique $\underset{\sim}{Q}$ de S_5 image de l'ensemble des droites de S_3 (1). Dans la suite (L), chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Si la suite (L) s'arrête au point U_n en présentant le cas de Laplace, les coordonnées de U_n ne dépendent pas de u et ce point décrit une courbe (U_n) lorsque v varie. Les cas suivant peuvent se présenter :

a) La courbe (U_n) n'appartient pas à un hyperplan. La suite (L) se termine au point V_{n+2} en présentant le cas de Goursat. Le point V_{n+2} décrit une courbe et la droite $V_{n+1} V_{n+2}$ une développable dont l'arête de rebroussement est la courbe (V_{n+2}) (2).

b) La courbe (U_n) appartient à un hyperplan, mais non à un espace linéaire à trois dimensions. La suite (L) se termine au point V_{n+2} en présentant le cas mixte. Le point V_{n+2} est fixe et le point V_{n+1} décrit un cône de sommet V_{n+2}.

c) La courbe (U_n) appartient à un espace linéaire à trois dimensions, mais non à un plan. La suite (L) se termine au point V_{n+1} en présentant le cas de Laplace et les coordonnées de V_{n+1} ne dépendent que de u. Le point V_{n+1} décrit une droite.

d) La courbe (U_n) est plane. La suite (L) se termine au point V_n en présentant le cas de Laplace. Le point V_n ne dépend que de u

(1) Nous renvoyons, pour les notations et pour les propriétés de la suite (L), aux notes que nous avons publiés depuis décembre 1927 dans les *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, et, depuis janvier 1932, dans le *Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*.

(2) Sur les surfaces donnant lieu, dans l'espace réglé, à une suite de Laplace terminée. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 1931, pp. 730-739.)

et la courbe (V_n) est plane et précisément située dans le plan conjugué, par rapport à Q, du plan de la courbe (U_n).

Lorsque la courbe (U_n) se réduit à une droite, ou lorsque le point U_n est fixe, on retrouve, sauf un changement de notations, le troisième ou le deuxième cas.

2. Plaçons-nous dans le troisième cas et supposons d'une manière précise, que la suite (L) se termine au point U_n en présentant le cas de Laplace, la courbe (U_n) appartenant à un espace linéaire à trois dimensions, mais que la suite (L) ne se termine pas, dans l'autre sens, avant le point V_n.

Par hypothèse, nous avons une relation de la forme

$$AU_n + BU_n^{01} + CU_n^{02} + DU_n^{03} + U_n^{04} = 0. \tag{1}$$

Si nous désignons par

$$\Omega(p, q) = 0$$

la condition pour que deux points p, q de S_5 soient conjugés par rapport à Q, nous avons

$$\Omega(U_n, V_{n-2}) = 0, \quad \Omega(U_n, V_{n-1}) = 0, \quad \Omega(U_n, V_n) = 0, \quad \Omega(U_n, V_{n+1}) = 0.$$

En dérivant successivement ces relations par rapport à v, on obtient

$$\Omega(U_n^{01}, V_{n-2}) + k_{n-2}\Omega(U_n, V_{n-3}) = 0,$$

$$\Omega(U_n^{01}, V_{n-1}) = 0, \quad \Omega(U_n^{02}, V_{n-1}) + k_{n-1}\Omega(U_n^{01}, V_{n-2}) = 0,$$

$$\Omega(U_n^{01}, V_n) = 0, \quad \Omega(U_n^{02}, V_n) = 0, \quad \Omega(U_n^{03}, V_n) + k_n\Omega(U_n^{02}, V_{n-1}) = 0,$$

$$\Omega(U_n^{01}, V_{n+1}) = 0, \quad \Omega(U_n^{02}, V_{n+1}) = 0, \quad \Omega(U_n^{03}, V_{n+1}) = 0, \quad \Omega(U_n^{04}, V_{n+1}) + k_{n+1}\Omega(U_n^{03}, V_n) = 0.$$

Dans ces relations, V_{n+1} doit être remplacé par V_n^{10} si $k_n = 0$.

On a donc

$$\Omega(U_n^{04}, V_{n+1}) = k_{n-2}k_{n-1}k_n k_{n+1}\Omega(U_n, V_{n-3}).$$

La relation (1) donne

$$A\Omega(U_n, V_{n+1}) + \cdots + D\Omega(U_n^{03}, V_{n+1}) + \Omega(U_n^{04}, V_{n+1}) = 0,$$

d'où

$$k_{n-2}k_{n-1}k_n k_{n+1}\Omega(U_n, V_{n-3}) = 0.$$

Le dernier terme, $\Omega(U_n, V_{n-3})$, ne peut être nul. V_{n-3} est en effet le pôle, par rapport à Q, de l'hyperplan $U_{n-5}\,U_{n-4}\,U_{n-3}\,U_{n-2}U_{n-1}$

et si $\Omega(U_n, V_{n-3}) = 0$, cet hyperplan contient également le point U_n. On aurait donc une relation de la forme

$$A_{n-5}U_{n-5} + A_{n-4}U_{n-4} + \cdots + A_nU_n = 0.$$

En dérivant cette relation par rapport à v, on trouverait que l'hyperplan en question contient l'espace $U_n \ldots U_n^{03}$. Le point V_{n-3} décrirait donc, lorsque u, v varient, la droite polaire, par rapport à Q, de cet espace, ce qui est impossible en vertu des hypothèses faites.

On ne peut d'autre part avoir $k_{n-2} = 0$, ou $k_{n-1} = 0$, car la suite (L) se terminerait au point V_{n-2} ou V_{n-1}, contrairement à l'hypothèse.

Si $k_n = 0$, on a $\Omega(U_n^{03}, V_n) = 0$ et le point V_n décrit la droite polaire, par rapport à Q, de l'espace $U_n \ldots U_n^{03}$. De la relation

$$V_n^{01} = k_nV_{n-1} = 0,$$

on déduit que la suite (L) se termine au point V_n en présentant le cas de Laplace, la courbe (V_n) étant une droite. Mais on a

$$\Omega(U_{n-1}, V_n) = 0, \qquad \Omega(U_{n-2}, V_n) = 0$$

et, en dérivant la première relation par rapport à u, on en déduit

$$\Omega(U_{n-1}, V_n^{10}) = 0.$$

Le point U_{n-1} appartiendrait donc à l'espace $U_n \ldots U_n^{03}$, ce qui est absurde.

Nous avons donc $k_{n+1} = 0$. Le point V_{n+1} ne dépend que de u, car on a

$$V_{n+1}^{01} = k_{n+1}V_n = 0$$

et la suite (L) se termine en point V_{n+1} en présentant le cas de Laplace. La courbe (V_{n+1}) se réduit à la droite polaire de l'espace $U_n \ldots U_n^{03}$ par rapport à Q.

3. Appliquons ce qui précède au cas $n = 1$. Le point U_1 décrit une courbe appartenant à un espace linéaire à trois dimensions Σ et le point V_2 la droite s, polaire de Ω par rapport à Q.

Désignons par S_n la développable ayant pour arête de rebroussement une courbe u de la surface (x), par R_v la surface gauche engendrée par les tangentes aux lignes u aux différents points d'une courbe v de cette surface. Le complexe linéaire osculateur à la surface S_n le long de la droite xx^{10} est représenté par l'hyperplan $U\,V\,V_1V_2V_{10}^2$, dont le pôle U_1 par rapport à Q ne dépend pas de u. Par suite, les asymptotiques u de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires, variables dans un système appartenant à un système linéaire ∞^3. Ces complexes ont en commun deux droites, représentées par les intersections de Q avec la droite $V_2V_2^{10}$.

Le complexe linéaire osculateur à la réglée R_v le long d'une droite xx^{10} est représenté par l'hyperplan $U\,U_1U_1^{01}U_1^{02}U_1^{03}$, dont le pôle V_2 par rapport à Q, ne dépend pas de v. Par suite, la réglée R_v appartient à un complexe linéaire variable dans un faisceau.

On en conclut que *si les asymptotiques* u *d'une surface* (x) *non réglée appartiennent à des complexes linéaires ayant en commun deux droites* d_1, d_2, *toute surface lieu des tangentes aux lignes* u *le long d'une asymptotique de l'autre mode, appartient à un complexe linéaire contenant la congruence linéaire de directrices* d_1, d_2.

Si les coordonnées d'un point de la surface (x) satisfont aux équations (Wilczynski)

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0,$$

on a, pour caractériser le cas étudié, les relations

$$h_1 = -(\log b)^{11} + 4ab = 0,$$
$$k_2 = -(\log ak_1)^{11} + k_1 = 0$$

ou

$$k_2 = -(\log a^2k_1)^{11} + 4ab = 0.$$

Liége, le 14 mars 1933.

MARCEL HAYEZ, Imprimeur, 112, rue de Louvain, Bruxelles.