Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, N° 4, 1933.

Sur quelques relations concernant les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques,

par Lucien GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

Les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques ont été considérées par M. Demoulin (1) et par nous (2). Nous avons montré que la suite de Laplace attachée à la surface dans l'espace réglé (3) était inscrite dans elle même, en ce sens que tout point de cette suite appartient au plan déterminé par trois autres points de la suite. C'est sur ces relations que nous allons revenir, en leur donnant une forme analytique.

1. — Soit (x) une surface non réglée de l'espace ordinaire S_3, rapportée à ses asymptotiques u, v et dont les coordonnées projectives homogènes des points satisfont au système complètement intégrable

$$x^{20} + 2b\,x^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2a\,x^{10} + c_2 x = 0.$$

Soient Q l'hyperquadrique de S_5 représentant les droites de S_3 et

$$U = |x \quad x^{10}|, \qquad V = |x \quad x^{01}|$$

les points de Q images des tangentes aux asymptotiques u, v de (x). On a

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0$$

et les points U, V appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \qquad (L)$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. On a

$$U_n = U_{n-1}^{01} - U_{n-1}(\log bh_1 \ldots h_{n-1})^{01}, \qquad V_n = V_{n-1}^{10} - V_{n-1}(\log ak_1 \ldots k_{n-1})^{10},$$
$$h_n = -(\log bh_1 \ldots h_{n-1})^{11} + h_{n-1}, \qquad k_n = -(\log ak_1 \ldots k_{n-1})^{11} + k_{n-1}.$$

---

(1) Sur la quadrique de Lie. (*C. R. Acad. Sc.*, 1908, t. 147, pp. 394-496.)

(2) Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques. (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1929, t. 57, pp. 26-41.)

(3) Voir notre note « Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé » (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-41) et les travaux que nous avons publiés depuis dans le même recueil.

Nous supposerons la suite (L) illimitée dans les deux sens.

Posons

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1),$$
$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les quadriques de Lie de la surface (x) n'aient que trois points caractéristiques est qu'un seul des nombres α, β soit nul. Nous supposerons $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$. On a alors

$$(\log bh_1)^{01} = 0, \quad h_2 = h_1, \quad h_3 = 4ab, \quad h_4 = k_1, \ldots, h_n = k_{n-3}.$$

Un point de la suite (L) appartient au plan déterminé par les 4e, 5e et 6e points le suivant.

2. — Sous les hypothèses faites, les relations générales que nous avons établies [1] entre U_3, U_2, ..., V_3 deviennent

$$U_3 + 2a[\alpha V + V_1(\log ak_1)^{10} + V_2] = 0, \tag{1}$$
$$V_3 + V_2(\log a^3k_1^2k_2)^{10} + \alpha_1 V_1 + 2bU_2 = 0, \tag{2}$$

où l'on a posé

$$\alpha_1 = \alpha + (\log ak_1)^{20} + (\log ak_1)^{10}(\log a^2k_1)^{10}.$$

En dérivant deux fois de suite la relation (1) par rapport à v, on obtient

$$U_4 = 4a^2\alpha U - a\alpha^{01}V - 2ak_1V_1, \tag{3}$$
$$U_5 = 4a^2\alpha U_1 + \left[4a^2\alpha\left(\log\frac{ab}{k_1}\right)^{01} + 6a^2\alpha^{01}\right]U - 2ak_1k_2V. \tag{4}$$

Écrivons

$$U_n = 4a^2\alpha U_{n-4} + A_nU_{n-5} + B_nU_{n-6} \tag{5}$$

et observons que l'on a

$$\alpha^{01} = -2k_1(\log ak_1)^{10}, \quad \alpha^{10} + 2\alpha(\log a)^{10} = 0, \quad (a^2\alpha^{01})^{10} = -2a^2\alpha(\log a)^{11}.$$

On voit aisément qu'à partir de $n \geq 7$, on a

$$A_n = 4a^2\alpha\left(\log\cdot\frac{a^{2n-12}}{(k_1 \ldots k_{n-7})^4 k_{n-6}^3 k_{n-5}^2 k_{n-4}}\right)^{01} + 4(n-4)a^2\alpha^{01}.$$

---

(1) Remarques sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie. (*C. R. du Congrès national des Sciences, Bruxelles*, 1930, pp. 69-70.)

En dérivant la relation (5) par rapport à v, on obtient

$$U_{n+1} = 4a^2\alpha U_{n-3} + A_{n+1}U_{n-4} + B_{n+1}U_{n-5}$$
$$+ [B_n^{01} + B_n(\log ak_1 \dots k_{n-9})^{01} - B_n(\log ak_1 \dots k_{n-3})^{01}]\, U_{n-6}.$$

Le terme en U_{n-6} doit disparaître, donc on a

$$B_n = k_{n-8} \dots k_{n-3}\varphi(u),$$

$\varphi(u)$ étant une fonction de u seule.

En dérivant la relation (5) par rapport à u on a

$$k_{n-3}U_{n-4} = [4a^2\alpha k_{n-7} + A_n^{10}]\, U_{n-5} + [A_n k_{n-8} + B_n^{10}]\, U_{n-6} + B_n k_{n-9}U_{n-7}.$$

On doit donc avoir

$$B_{n-1}k_{n-3} = B_n k_{n-9},$$

d'où

$$B_{n-1} = k_{n-9} \dots k_{n-4}\varphi(u).$$

La formule donnant B_n n'est valable que pour $n \geq 9$. Écrivons la formule (5) pour $n = 9$ et décrivons plusieurs fois de suite par rapport à u. On obtient

$$B_8k_6 = 4abB_9, \quad B_7k_5 = h_1B_8, \quad B_6k_4 = h_1B_7, \quad B_5k_3 = -2bB_6.$$

Or, on a

$$B_5 = -2ak_1k_2, \qquad B_9 = k_1 \dots k_6\varphi(u),$$

par suite

$$\varphi(u) = \left(\frac{1}{2bh_1}\right)^2,$$

$$B_n = \frac{k_{n-8} \dots k_{n-3}}{4(bh_1)^2}, \qquad (n \geq 9).$$

L'expression (5) est formée pour $n \geq 9$; par dérivations successives de cette relation pour $n = 9$ par rapport à u, on obtiendra la forme de (5) pour $n = 8$, 7, 6 sans difficulté.

3. En dérivant la relation (2) par rapport à u, on trouve

$$\left.\begin{aligned} &V_4 + V_3\left(\log\frac{a^4k_1^3k_2^2k_3}{b}\right)^{10} + \alpha_2V_2 \\ &+ [\alpha_1^{10} + \alpha_1(\log ak_1)^{10} - \alpha_1(\log b)^{10}]\, V_1 + 2bh_1U_1 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Le terme en V_1 doit disparaître et on a donc

$$\alpha_1 = \frac{b}{a k_1}\,\psi(v),$$

$\psi(v)$ ne dépendant que de v. D'autre part, en dérivant (2) par rapport à v, on doit retrouver (1), ce qui donne

$$\alpha_1 k_1 = 4ab\alpha,$$

d'où

$$\psi(v) = 4a^2\alpha, \qquad \alpha_1 = \frac{4ab\alpha}{k_1}.$$

En dérivant la relation (6) par rapport à v et en comparant le résultat à (2), on obtient

$$\alpha_2 k_1 = \alpha_1 h_1, \qquad \alpha_2 = \frac{4abh_1\alpha}{k_1 k_2}.$$

On obtient de même, successivement,

$$V_5 + V_4\left(\log\frac{a_5 k_1^4 \ldots k_4}{b^2 h_1}\right)^{10} + \frac{4ab\,h_1^2\alpha}{k_1k_2k_3}V_3 + 2bh_1^2 U = 0, \tag{7}$$

$$V_6 + V_5\left(\log\frac{a^6 k_1^5 \ldots k_5}{b^3 h_1^3}\right)^{10} + \frac{16\,a^2b^2h_1^2\alpha}{k_1k_2k_3k_4}V_4 = 4b^2h_1^2 V, \tag{8}$$

$$V_7 + V_6\left(\log\frac{a^7 k_1^6 \ldots k_6}{ab^5 h_1^5}\right)^{10} + \frac{16\,a^2b^2h_1^2\alpha}{k_2k_3k_4k_5}V_5 = 4b^2h_1^2 V_1. \tag{9}$$

La formation est alors régulière et l'on a, en général, pour $n \geq 6$,

$$\left.\begin{aligned} &V_{n+6} + V_{n+5}\left[\log\frac{a^{n+6}k_1^{n+5}\ldots k_{n+5}}{a^n k_1^{n-1}\ldots k_{n-1}(bh_1)^{2n+3}}\right]^{10} \\ &\quad + \frac{16\,a^2b^2h_1^2\alpha}{k_{n+1}\ldots k_{n+4}}V_{n+4} = 4b^2h_1^2 V_n. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

4 Nous avons établi, par une voie indirecte, la relation

$$\alpha_1 = \alpha + (\log ak_1)^{20} + (\log ak_1)^{10}(\log a^2k_1)^{10} = \frac{4ab\alpha}{k_1},$$

nous allons l'établir directement.

Des relations

$$\alpha^{10} + 2\alpha(\log a)^{10} = 0, \qquad \alpha^{01} + 2k_1(\log ak_1)^{10} = 0,$$

on déduit

$$\alpha^{11} + 2\alpha^{01} (\log a)^{10} + 2\alpha (\log a)^{11} = 0,$$

$$\alpha^{11} + 2k_1 (\log a k_1)^{20} + 2k_1 (\log a k_1)^{10} (\log k_1)^{10}. \qquad (11)$$

La première de ces relations peut s'écrire

$$\alpha^{11} - 4k_1 (\log a)^1 (\log a k_1)^{10} + 8ab\alpha - 2\alpha k_1 = 0. \qquad (12)$$

L'élimination de α^{11} entre les équations (11), (12) donne

$$2\alpha k_1 + 2k_1 (\log a k_1)^{20} + 2k_1 (\log a k_1)^{10} (\log a^2 k_1)^{10} - 8ab\alpha = 0,$$

c'est-à-dire la relation que nous voulions établir.

Liége, le 14 avril 1933.

Marcel HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.