Académie royale de Belgique.

—

EXTRAIT

du *Bulletin de la Classe des Sciences*

5e série — T. XIX — N° 5 — 1933

Koninklijke Belgische Academie.

—

UITTREKSEL

der *Mededeelingen van de Afdeeling Wetenschappen*

5de Reeks — B. XIX — Nr 5 — 1933

Sur les courbes fondamentales de seconde espèce des transformations birationnelles involutives de l'espace,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Nous nous proposons, dans cette courte note, d'étudier les courbes fondamentales de seconde espèce d'une transformation birationnelle involutive de l'espace, lorsqu'elles sont leurs propres associées. En d'autres termes, nous supposons qu'aux points infiniment voisins d'un point d'une telle courbe correspondent les points de la courbe elle-même. Les points de cette courbe sont alors des points unis de l'involution engendrée par la transformation.

Lorsque, étant donnée une involution I_2 d'ordre deux possédant une courbe Γ dont tous les couples de points font partie de l'involution, on connaît un système linéaire de surfaces composé au moyen de I_2 dont la courbe Γ n'est pas une courbe-base, on en déduit une variété algébrique V_3, image de l'involution, sur laquelle à la courbe Γ correspond un point de diramation, multiple pour la variété. Dans cette note, nous partons au contraire de la transformation génératrice de l'involution et nous montrons qu'à la courbe unie Γ correspond une courbe de diramation simple de la variété image de l'involution que nous construisons. Au contraire, à une courbe non fondamentale, lieu de points unis de l'involution, correspond une courbe double de cette variété. Cette différence provient de ce que la courbe Γ peut être regardée, en quelque sorte, comme un point uni isolé de l'involution I_2.

1. Soit T une transformation birationnelle involutive de l'espace, d'équations

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4.$$

Nous désignerons par I_2 l'involution engendrée par T, par Ψ les surfaces, supposées d'ordre n, que T fait correspondre aux plans ψ de l'espace, par ρ les courbes d'ordre n que T fait correspondre aux droites r de l'espace.

Le système linéaire complet

$$|F| = |\psi + \Psi|,$$

de surfaces d'ordre $n+1$, est transformé en lui-même par T; ses surfaces ont le même comportement que les surfaces Ψ aux points-base de $|\Psi|$.

Le système $|F|$ a le degré $6n+2$ et deux surfaces F se coupent suivant des courbes variables C d'ordre $3n+1$ et de genre $2\pi+4n-3$, π étant le genre de la courbe γ commune à un plan ψ et à sa transformée Ψ. Les adjointes d'ordre $n+1-4=n-3$ à une surface F sont les adjointes d'ordre $n-3$ à une surface Ψ; elles découpent, sur une section plane de cette surface, la série canonique complète et par suite le genre arithmétique des surfaces F est égal à π. Cela résulte d'ailleurs d'une formule plus générale de M. Severi (¹).

Parmi les surfaces F se trouvent les surfaces d'équations

$$\Sigma \lambda_{ik} x_i \varphi_k = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

comprenant les surfaces formées d'un plan et de sa transformée par T. De telles surfaces appartiennent à un système $|F_0|$, de dimension r, compris dans $|F|$ et composé au moyen de I_2.

La surface lieu des courbes γ situées dans les plans d'un faisceau est également une surface F; son équation peut s'écrire sous la forme

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 & \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 + \lambda_4 \varphi_4 \\ \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \mu_4 x_4 & \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \mu_3 \varphi_3 + \mu_4 \varphi_4 \end{vmatrix} = 0.$$

(¹) Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche. (*Rend. del Circolo matematico di Palermo*, 2° sem., 1909, pp. 33-87.)

Ces surfaces appartiennent à un système $|F_1|$, compris dans $|F|$, composé au moyen de l'involution I_2 et distinct de $|F_0|$. Tout point uni de l'involution I_2 appartient aux surfaces F_1 et en particulier, si l'involution I_2 possède une surface lieu de points unis, celle-ci est une composante fixe de $|F_1|$. Au contraire, un point uni de I_2 n'appartient pas, en général, à une surface F_0.

2. Rapportons projectivement les surfaces F_0 aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. Nous obtenons une variété algébrique V_3^{3n+1} de S_r, à trois dimensions, d'ordre $3n+1$, image de l'involution I_2.

Si l'involution I_2 possède un point uni isolé, ce point n'appartient pas en général aux surfaces F_0; il lui correspond sur V_3^{3n+1} un point de diramation quadruple pour la variété, le cône tangent en ce point appartenant à un espace linéaire S_5 à cinq dimensions et ayant pour sections hyperplanes des surfaces de Véronèse [1].

Si l'involution I_2 possède une courbe isolée, lieu de points unis, qui ne soit pas fondamentale pour la transformation T, il lui correspond, sur la variété V_3^{3n+1}, une courbe double pour cette variété. Soit, en effet, δ la courbe de points unis envisagée. Les surfaces F_0 coupent δ en un certain nombre de points variables et par suite il lui correspond, sur V_3^{3n+1}, une courbe δ'. Sur une surface F_0, il existe une involution d'ordre deux ayant, aux points de rencontre de cette surface et de la courbe δ, des points unis isolés. Par suite, sur la section hyperplane correspondante de V_3^{3n+1}, les points de diramation correspondants sont des points doubles coniques de cette section [2]. Il en résulte que la courbe δ' est double pour

(1) Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1931, pp. 29-39.)

(2) Mémoire sur les surfaces algébriques doubles, ayant un nombre fini de points de diramation. (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914, pp. 289-312.)

V_3^{3n+1}, les tangentes à cette variété en un point de cette courbe formant un cône du second degré en général irréductible.

3. Supposons que la transformation T possède une courbe fondamentale de seconde espèce Γ, ordinaire. Aux points infiniment voisins d'un point O de Γ, T fait correspondre les points d'une courbe rationnelle Γ' qui reste fixe lorsque O décrit Γ. La courbe Γ' est à son tour fondamentale de seconde espèce pour $T^{-1} = T$ et aux points infiniment voisins de tout point de Γ' correspondent les points de Γ. Il en résulte que si les courbes Γ, Γ' coïncident, tous les points de cette courbe Γ sont unis pour l'involution I_2.

Plaçons-nous dans cette hypothèse. Désignons par ν l'ordre de la courbe Γ et par s sa multiplicité pour les surfaces Ψ et par suite pour les surfaces F. Aux plans passant par un point de Γ correspondent des surfaces Ψ ayant, le long de Γ, un certain nombre λ de plans tangents fixes; on a donc $s = \lambda\nu$ (1).

Une courbe ρ, transformée par T d'une droite r, ne s'appuie pas, en général, sur la courbe Γ. Considérons deux plans ψ_1, ψ_2 et leurs transformées Ψ_1, Ψ_2. L'ensemble de la droite $r = \psi_1\psi_2$, de sa transformée ρ et des courbes (ψ_1, Ψ_2), (ψ_2, Ψ_1) constitue une courbe C; par suite les courbes C rencontrent Γ en $2\nu s$ points variables. De plus, lorsqu'un point d'une courbe C tend vers un point d'appui de cette courbe sur Γ, le point homologue dans I_2 tend vers un second point d'appui de la courbe C envisagée sur Γ. Une courbe C s'appuie donc sur Γ en $2\nu s$ points variables formant νs couples de I_2.

La courbe Γ contient donc ∞^2 couples de I_2 et il lui correspond, sur la variété V_3^{3n+1}, une surface Φ, rationnelle puisque Γ est rationnelle.

Soient P_1, P_2 deux points d'appui sur Γ d'une courbe C, formant un couple de l'involution I_2. Les surfaces F_0 tangentes

(1) Voir MONTESANO, Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali delle spazio. (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1° sem. 1918, pp. 396-400, 438-551; 2° sem. 1921, pp. 447-451.)

à C en P_1 touchent également cette courbe en P_2; elles ne rencontrent donc plus cette courbe qu'en $3n$ couples de I_2 variables. Par suite, la surface Φ est simple pour la variété V^{n+1} et, de plus, cette surface Φ a l'ordre νs.

4. Désignons par ϖ un plan tangent en P_1 à la courbe Γ et considérons les ∞^{r-1} surfaces F_0 touchant ϖ en P_1. Aux points de ϖ infiniment voisins de P_1, T fait correspondre le point P_2. Lorsque le plan ϖ décrit le faisceau ayant pour axe la tangente à Γ en P_1, le point P_2 décrit la courbe Γ et pour λ positions du plan ϖ, P_2 coïncide avec P_1. Soit ϖ_0 une de ces positions du plan ϖ et soit F'_0 une surface F_0 touchant ϖ_0 en P_1. Une courbe C tracée sur F'_0 et passant par P_1 touche, en général, la courbe Γ en ce point. Les surfaces F_0 tangentes à ϖ_0 en P_1 ont quatre points d'intersection avec la courbe C absorbés en ce point; par suite le point de diramation correspondant sur la variété V_3^{3n+1} est simple pour cette variété.

Aux points de la courbe Γ considérés comme points unis de l'involution I_2 correspond, sur la variété V_3^{3n+1}, une courbe de diramation Γ_1, appartenant à la surface Φ, et qui est simple pour la variété. A un point de Γ correspondent λ plans tangents à cette courbe en ce point et l'ordre de la courbe (rationnelle) Γ_1 sera égal au nombre de points de Γ auxquels correspondent des plans tangents à une surface F_0 déterminée.

Les s plans tangents à une surface F_0 en un point de Γ ne sont pas, en général, formés de ν groupes de λ plans correspondant à ν points de Γ. Cela étant, en un point P de Γ, il y a s plans tangents à une surface F_0 déterminée et à ces s plans correspondent s points P' de Γ. Inversement, à un point P' correspondent s points P. Cette correspondance (s, s) entre les points P, P' est involutive et a par suite s points unis. La courbe de diramation Γ_1 a par suite l'ordre s.

Liége, le 15 avril 1933.

Marcel HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, 112, rue de Louvain, Bruxelles.