Mathesis, juillet 1928.

EXERCICES DE GÉOMÉTRIE,

par M. L. Godeaux, professeur à l'Université de Liége.

1. Soit Γ une conique inscrite dans un triangle ABC. Nous nous proposons de démontrer que *les coniques circonscrites au triangle* ABC *et tangentes à* Γ *coupent encore celle-ci suivant des couples de points formant une involution ayant pour pôle le centre d'homologie du triangle* ABC *et du triangle* A'B'C' *déterminé par les points de contact de la conique* Γ *avec les côtés du triangle* ABC (¹).

Voici en premier lieu une démonstration par la géométrie projective de cette propriété.

Soit Γ' une conique circonscrite au triangle ABC et tangente en P à Γ. Désignons par M, N les points de rencontre avec AB, AC de la corde commune à Γ, Γ' ne passant pas par P ; par M', N' les points où la tangente en P à Γ et Γ' rencontre AB, AC.

Les coniques Γ, Γ' et MN + M'N' appartiennent à un même faisceau et découpent, sur AB, trois couples C'C', AB, MM' d'une même involution ne dépendant pas de la position du point P sur Γ. Les ponctuelles (M), (M') sont projectives. Il en est de même des ponctuelles (N), (N'). Les ponctuelles (M'), (N') sont projectives puisque la droite M'N' enveloppe une conique. Par suite, les ponctuelles (M), (N) sont projectives. De plus, lorsque M coïncide avec A, M' coïncide avec B, N' avec C et N avec A, donc les ponctuelles (M), (N) sont perspectives et la droite MN passe par un point fixe O.

Lorsque M coïncide avec C', il en est de même de M' ; N' coïncide avec A et N avec C. Par suite, la droite CC' passe par O. Il en est de même de la droite BB' et O est donc le centre d'homologie des triangles ABC, A'B'C'.

(¹) Ce théorème a été proposé comme question à résoudre dans les *Esercitazioni Matematiche del Circolo matematico di Catania*, 1921, p. 177. La solution qui en a été donnée dans ce recueil (1922, pp. 33-34), utilise les méthodes de la géométrie projective, mais nous paraît moins simple que celle que nous donnons ici.

Cfr. M, question 2125, 1922-407 et 1923-275.

2. Pour traiter la question par la géométrie analytique, prenons ABC comme triangle de référence, O comme point unitaire. L'équation de Γ est alors

$$f \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = 0.$$

Si x', y', z' sont les coordonnées de P, la tangente M'N' à Γ en P a pour équation

$$\varphi \equiv (x' - y' - z')\, x + (y' - z' - x')\, y + (z' - x' - y')\, z = 0.$$

Si enfin l'équation de la droite MN est

$$ax + by + cz = 0,$$

celle de Γ' a la forme

$$f + \varphi\,(ax + by + cz) = 0.$$

Ecrivons que cette conique passe par A, B, C. Nous obtenons

$$1 + a\,(x' - y' - z') = 0, \qquad 1 + b\,(y' - z' - x') = 0,$$
$$1 + c\,(z' - x' - y') = 0.$$

On en déduit

$$x' = \frac{b + c}{2bc}, \qquad y' = \frac{c + a}{2ca}, \qquad z' = \frac{a + b}{2ab}$$

et, en écrivant que le point P appartient à Γ,

$$a + b + c = 0.$$

Par suite, la droite MN passe par O.

3. En particularisant le triangle ABC, on peut obtenir des exercices rentrant dans le programme des cours de géométrie analytique des Athénées. Voici les énoncés de trois de ces exercices (1).

---

(1) Nous avons posé ces questions à l'examen d'entrée à l'École Militaire, il y a quelques années.

I. *Soient une hyperbole* H *d'asymptotes* Ox, Oy *et une tangente à cette hyperbole rencontrant* Ox *en* A *et* Oy *en* B. *Les coniques* Γ' *tangentes à* H *et circonscrites au triangle* OAB *rencontrent encore* H *en deux points alignés sur le quatrième sommet du parallélogramme ayant* OA, OB *comme côtés.* (*Les coniques* Γ' *sont des hyperboles*).

II. *Les hyperboles tangentes à une parabole* P, *ayant pour directions asymptotiques deux tangentes* Ox, Oy *à cette parabole, et passant par* O, *rencontrent encore la parabole en des couples de points alignés sur le quatrième sommet d'un parallélogramme ayant pour autres sommets* O *et les points de contact de* Ox, Oy *avec* P.

III. *Soient* a, a', b *trois tangentes à un cercle* Γ, *les deux premières étant parallèles. Les coniques tangentes au cercle* Γ, *ayant* a *comme direction asymptotique et passant par les points* ab, a'b, *coupent encore* Γ *en des couples de points alignés sur le point commun aux droites joignant les points* ab, a'b *respectivement aux points de contact de* Γ *avec* a' *et* a.

4. Soient ABC un triangle, A′, B′, C′ les projections d'un point O de A, B, C sur les côtés opposés du triangle, A″, B″, C″ les conjugués harmoniques de A′, B′, C′ par rapport respectivement aux couples de points BC, CA, AB. Les points A″, B″, C″ sont en ligne droite. Désignons par I_a, I_b, I_c les involutions hyperboliques appartenant aux droites BC, CA, AB et ayant comme points doubles respectivement A′ et A″, B′ et B″, C′ et C″.

Considérons deux transversales p, q coupant BC en deux points L, L′ formant un couple de I_a, CA en deux points M, M′ formant un couple de I_b, et AB en deux points N, N′. Nous allons démontrer que *les points* N, N′ *forment un couple de* I_c [1].

Considérons l'homologie harmonique Ω de centre A″ et d'axe AA′. Elle détermine, sur la droite BC, l'involution I_a. Les points B′, C′, A″ sont en ligne droite, les points B′ et C′, B″ et C″ sont échangés entre eux par Ω ; par suite, les involutions I_b, I_c sont échangées entre elles par Ω.

---

[1] Cfr. M, 1925-204, 1927-31.

Si P, Q sont les points où p, q rencontrent AA$'$, aux droites p, q, Ω fait correspondre les droites $p' = \mathrm{L'P}$, $q' = \mathrm{LQ}$. Considérons le faisceau des coniques passant par les points L, L$'$, P, Q. Les coniques de ce faisceau découpent sur AC des couples d'une involution ; parmi ces couples se trouvent AC, MM$'$, donc cette involution est I_b. Aux points N, N$'$, Ω fait correspondre les points de rencontre de BC et de p', q'. Ces points forment un couple de I_b, donc N, N$'$ forment un couple de I_c.

5. Du résultat précédent on peut déduire les conséquences suivantes :

Soit Γ une conique circonscrite au triangle ABC. Les coniques du faisceau déterminé par Γ et par la conique $p + q$ déterminent, sur les côtés du triangle les involutions I_a, I_b, I_c. Par suite, les points de contact A$'$, A$''$, ..., C$''$ des coniques du faisceau tangentes aux côtés du triangle sont trois à trois sur quatre droites.

Plus généralement, considérons un faisceau de coniques et un triangle inscrit à une conique du faisceau ; il existe six coniques du faisceau tangentes aux côtés du triangle et les six points de contact sont trois à trois sur quatre droites.

La proposition corrélative se démontre directement de la manière suivante [1] : Un faisceau tangentiel de coniques peut se transformer, par une homographie, en un système de coniques homofocales. Considérons un tel système de coniques et un triangle circonscrit à l'une d'elles. Les tangentes aux coniques du système passant par les sommets du triangle en ces points sont les bissectrices du triangle, elles passent donc trois à trois par quatre points.

---

(1) DARBOUX, *Principes de géométrie analytique* (Paris, Gauthier-Villars, 1917), p. 268.