L'INVOLUTION PLANE DE BERTINI,

par M. L. Godeaux, Professeur à l'Université de Liége.

(Suite) (¹)

6. — Nous allons reprendre la question précédente sans faire d'autre hypothèse sur la position des points A_1, A_2, ..., A_8 que la suivante : Les cubiques planes C_3' passant par ces huit points sont en général irréductibles. Il en sera alors de même des cubiques C_3 passant par A_1, A_2, ..., A_6 et des sextiques C_6 passant doublement par les huit points donnés.

Les points A_1, A_2, ..., A_8 ou quelques-uns de ces points pourront être infiniment voisins successifs (²). Par exemple, les courbes C_6 pourront posséder six points doubles ordinaires et un tacnode (c'est-à-dire deux points doubles infiniment voisins successifs), ou encore les courbes C_6 pourront avoir un point double en un point simple d'une courbe algébrique γ et rencontrer cette courbe en seize points confondus en ce point (c'est-à-dire avoir huit points doubles infiniment voisins successifs sur γ).

Dans tous les cas, les cubiques C_3' ne pourront avoir un point double fixe ; il en est de même des courbes C_3. Ces dernières formeront un système linéaire de dimension trois et de degré trois.

En rapportant projectivement les courbes C_3 aux plans de l'espace, on obtient encore une surface cubique F en correspondance birationnelle avec le plan ϖ. La surface F, lorsque quelques-uns des points A_1, A_2, ..., A_6 sont infiniment voisins, présente des points doubles en nombre fini ; les particularités de la surface F ont été étudiées par Dickmann (³).

Aux courbes C correspondent les sections de F par les plans passant par une droite p. Cette droite p ne peut appartenir à la surface F, car autrement, ou bien cette droite correspondrait à un des points A_1, A_2, ..., A_6 et les courbes C_3' auraient un point double en ce point, ou bien cette droite correspondrait à une courbe du plan ϖ et celle-ci ferait partie de toutes les courbes C_3', qui seraient ainsi dégénérées, contrairement à l'hypothèse.

(¹) Voir *Mathesis*, 1929 — 11.

(²) Pour la notion de points infiniment voisins successifs, voir par exemple le fasc. XXII du Mémorial des Sciences mathématiques, déjà cité.

(³) *Ueber die Modificationen, welche die ebene Abbildung einer Fläche* 3ter *Ordnùng durch Auftreten von Singularitäten erhält* (Math. Annalen, 1871, t. IV, pp. 442-475).

La droite p ne peut passer par un point double de la surface F. En effet, un tel point double provient ou d'une courbe fondamentale du système $|C_3|$, ou d'un point A_1 par exemple auquel est infiniment voisin un des points $A_2, A_3, \ldots, A_6$. Dans le premier cas, les courbes C'_3 contiendraient la courbe fondamentale comme partie et seraient toutes dégénérées. Dans le second, aux points infiniment voisins de A_1 correspondent les points de la surface F infiniment voisins du point double appartenant à la droite p. Les courbes C'_3 auraient toutes un point double en A_1, ce qui est impossible.

Les points d'intersection de la surface F et de la droite p correspondent aux points A_7, A_8 et B. Nous aurons à considérer trois cas, selon que la droite p rencontre F en trois points distincts, ou qu'elle est tangente à F, ou qu'elle est osculatrice à cette surface.

7. — Aux courbes C_6 correspondent, sur F, des courbes Γ_6 d'ordre six découpées par des quadriques Q formant un système linéaire $|Q|$. Les courbes C_6 rencontrent les cubiques C'_3 en dix-huit points dont seize sont absorbés par $A_1, A_2, \ldots, A_8$; il y a donc deux points d'intersection variables. Par suite, si α est un plan quelconque passant par p, les quadriques Q rencontrent la cubique (F, α) en deux points variables. Parmi les six points d'intersection des quadriques Q et de (F, α), il y en a donc quatre absorbés en des points communs à F et à p, correspondant à A_7, A_8.

Supposons en premier lieu que la droite p rencontre F en trois points distincts. Ces points correspondent aux points A_7, A_8, B du plan ϖ et nous les désignerons par A'_7, A'_8, B'. Les quadriques Q sont tangentes à F en A'_7, A'_8. Il suffit de répéter le raisonnement fait dans le cas général. Si β est le plan tangent à F en B', les droites s'appuyant sur p et sur la courbe (F, β) forment une congruence linéaire et découpent sur F des couples de points d'une involution. On obtient en correspondance, sur le plan ϖ, l'involution de Bertini. Si P'_1, P'_2 sont les points où une droite s'appuyant sur p et (F, β) rencontre encore F, les quadriques Q passant par P'_1 passent nécessairement par P'_2. Par suite, les courbes C_6 passant par un point du plan passent en conséquence par le couple de l'involution de Bertini comprenant ce point. Cela étant, le système linéaire $|C_6|$ étant de degré quatre, est de dimension trois, car les courbes C_6 passant par deux points quelconques ne peuvent plus avoir de points variables en commun et forment donc un faisceau.

8. — Supposons maintenant que la droite p soit tangente à la surface F. Deux cas peuvent se présenter : Les courbes C_6 ont un tacnode en A_7 (le point A_8 étant infiniment voisin de A_7 sur la tangente tacnodale), ou bien les points A_7, A_8 sont distincts et les courbes

C'_3 ont une tangente fixe en un de ces points, par exemple en A_8 (le point B est infiniment voisin de A_8 sur cette tangente). Dans le premier cas, le point de contact de p avec F est le point A'_7 qui correspond à A_7, le second point d'intersection étant B', correspondant à B. Dans le second cas, le point de contact A'_8 correspond à A_8, l'autre point d'intersection A'_7 correspondant à A_7. Nous étudierons tout d'abord le premier cas.

Soient α un plan passant par p, γ' la conique section du plan α par une quadrique du système $|Q|$. La conique γ' a quatre points d'intersection avec la cubique (F, α) confondus en A'_7. Soient P'_1, P'_2 les deux autres points d'intersection de ces courbes. Considérons le faisceau de cubiques planes déterminé par (F, α) et par la courbe formée de la droite p comptée deux fois et de la droite $P'_1 P'_2$. Il existe une courbe de ce faisceau comprenant la conique γ' et complétée par la tangente en B' à la courbe (F, α). Par suite, la droite $P'_1P'_2$ passe par le tangentiel T de B'. En répétant les raisonnements faits plus haut, on voit que les droites s'appuyant sur p et (F, β) découpent, sur F, les couples de points d'une involution. Les quadriques Q passant par un point de F passent en conséquence par le point qui complète le groupe de cette involution. On obtient en correspondance, dans le plan ϖ, l'involution de Bertini et les courbes C_6 passant par un point d'un groupe de cette involution passent en conséquence par le second. Par suite, le système $|C_6|$ a la dimension trois.

9. — Passons à l'étude du second cas. Le plan tangent à F en A'_8 contient la droite p, tangente en ce point à F. Le plan tangent à F en A'_7 ne peut contenir p, car alors cette droite appartiendrait à F, ce qui est impossible. Les courbes Γ_6 ont des points doubles en A'_7, A'_8 et les quadriques Q doivent toucher F en ces points ; ces quadriques contiennent par suite la droite p. Le plan tangent à F en A_7 doit être tangent aux quadriques Q en ce point, ce qui est impossible, puisque ce plan ne contient pas p. Les quadriques Q sont donc des cônes de sommet A'_7, tangents le long de p au plan tangent à F en A'_8. Il en résulte que les droites passant par A'_7 découpent sur F les couples de points d'une involution à laquelle correspond l'involution de Bertini du plan ϖ. Le système des cônes $|Q|$ et le système $|C_6|$ sont ∞^3.

10. — Envisageons enfin le dernier cas où la droite p oscule F en un point A'_7. Les courbes C_6 ont alors un tacnode en A'_7 et les courbes C'_3 s'osculent deux-à-deux en ce point.

Considérons un plan α passant par p et la conique γ' section d'une quadrique Q par α. La conique γ' doit rencontrer la courbe (F, α) en quatre points confondus en A'_7. Or, ce point est un point d'inflexion pour la courbe (F, α), donc la conique γ' dégénère en la tangente p à F en A_7' et une droite passant par A_7'. Les quadriques Q sont donc des cônes de sommet A_7', passant par p. Les courbes Γ_6 devant avoir un tacnode en A_7', les cônes Q touchent le long de p le plan tangent en A_7' à la surface F et les cônes sont donc en nombre ∞^3.

Les droites passant par A_7' déterminent sur F les couples de points d'une involution à laquelle correspond, sur le plan ϖ, l'involution de BERTINI. Un groupe de cette involution impose encore une condition aux courbes C_6 qui doivent le contenir et le système $|C_6|$ a, comme le système $|Q|$, la dimension trois.

11. — Il est bien clair que dans certains cas particuliers envisagés, l'involution de BERTINI peut être une transformation involutive de JONQUIÈRES ou une homologie harmonique. En voici un exemple.

Supposons que les huit points A_1, A_2, ..., A_8 soient infiniment voisins successifs. La surface F s'obtiendra en rapportant projectivement aux plans de l'espace des cubiques planes C_3 ayant en A_1 un contact du cinquième ordre. On sait que l'on obtient ainsi une surface cubique ayant un point double uniplanaire singulier (1). Si O_4 ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) est ce point singulier, l'équation de F peut s'écrire

$$x_4\, x_3^2 - x_2^3 - x_3 x_1^2 = 0.$$

En projetant de O_4 sur le plan $x_4 = 0$ les sections planes de F, on obtient les courbes C_3.

$$x_3^2\,(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) + \lambda_4\,(x_2^3 + x_3 x_1^2) = 0.$$

Ces courbes ont un point d'inflexion en O_1 ($x_2 = x_3 = x_4 = 0$). Ces courbes passent par les six points infiniment voisins successifs $O_1 \equiv A_1$, A_2, ..., A_6. Aux points infiniment voisins de A_6 correspondent les points de la droite O_1O_4. En particulier, au point A_7 correspondra un point A_7' de cette droite. Puisque A_8 est infiniment voisin de A_7, la droite p sera tangente à F en A_7'. Mais une tangente à F en un point de O_1O_4 est osculatrice à la surface, donc B est infiniment voisin de A_8. Nous pouvons supposer que les courbes C_3' sont données par

$$\lambda_3 x_3^3 + \lambda_4\,(x_2^3 + x_3 x_1^2) = 0.$$

Alors A_7' coïncide avec O_1 et p avec la droite $x_3 = x_4 = 0$. Nous sommes actuellement dans le dernier cas étudié (n° **10**). Les cônes Q, de sommet O_1, tangents le long de la droite $x_3 = x_4 = 0$ au plan tangent $x_3 = 0$ à la surface F en O_1 ont pour équation

$$\mu_1 x_2 x_3 + \mu_2 x_3^2 + \mu_3 x_3 x_4 + \mu_4 x_4^2 = 0.$$

(1) DICKMANN, loc. cit.

Par suite, les courbes C_6 ont pour équation

$$\mu_1 x_2 x_3^5 + \mu_2 x_3^6 + \mu_3 x_3^3 (x_2^3 + x_3 x_1^2) + \mu_4 (x_2^3 + x_3 x_1^2)^2 = 0.$$

Une droite passant par O_1 rencontre F en deux points (x_1, x_2, x_3, x_4), $(-x_1, x_2, x_3, x_4)$. Par suite, l'involution de Bertini est donnés par

$$\frac{x_1'}{-x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{x_3'}{x_3}$$

et cette involution est une homologie harmonique.