Mathesis, octobre **1927**.

SUR UNE FAMILLE DE QUADRIQUES,

(*Exercice de Géométrie analytique*)

par M. L. Godeaux, Professeur à l'Université de Liége.

1. Considérons la quadrique d'équation

$$\alpha^3 (x^2 + 2yz) + \alpha^2 (y^2 + 2zx) + \alpha (z^2 + 2xy) = 1, \qquad (1)$$

où α est une quantité réelle, les axes étant quelconques. Proposons-nous de rechercher le lieu du pôle d'un plan réel

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2)$$

par rapport à la quadrique (1), lorsque α varie.

Commençons par observer que pour $\alpha = 0$, la quadrique (1) se réduit au plan de l'infini compté deux fois et que, par rapport à cette quadrique, le plan (2) peut être considéré comme plan polaire d'un point quelconque du plan de l'infini.

Pour $\alpha = 1$, la quadrique (1) se réduit à deux plans parallèles

$$x + y + z = \pm 1,$$

et tout point de la droite commune à ces plans est le pôle du plan (2). Par conséquent, si nous défalquons du lieu cherché le plan de l'infini, nous pourrons, dans la recherche de ce lieu, simplifier les expressions obtenues en supprimant les facteurs α et $\alpha - 1$.

Cela étant, un point du lieu cherché satisfait aux équations

$$\frac{\alpha^3 x + \alpha y + \alpha^2 z}{A} = \frac{\alpha x + \alpha^2 y + \alpha^3 z}{B}$$
$$= \frac{\alpha^2 x + \alpha^3 y + \alpha z}{C} = -\frac{1}{D}. \qquad (3)$$

Nous distinguerons trois cas.

2. Premier cas. Deux au moins des coefficients A, B, C sont différents et D n'est pas nul. Les équations (3) donnent

$$x = \frac{A\alpha - B}{D\alpha(1-\alpha^3)}, \quad y = \frac{C\alpha - A}{D\alpha(1-\alpha^3)}, \quad z = \frac{B\alpha - C}{D\alpha(1-\alpha^3)}. \tag{4}$$

Le lieu cherché est donc une courbe Γ du quatrième ordre. Cette courbe appartient au plan

$$(AB - C^2)\,x + (CA - B^2)\,y + (BC - A^2)\,z = 0. \tag{5}$$

Ce plan est bien déterminé. En effet, si l'un des nombres A, B, C est nul, pour que les coefficients du plan (5) soient nuls, il faut que les deux autres nombres soient nuls également. Si aucun des nombres A, B, C n'est nul, et si les coefficients de l'équation (5) sont nuls, on a

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{A}$$

d'où, le plan (2) étant réel, $A = B = C$. Dans les deux cas, les nombres A, B, C sont donc égaux, contrairement à l'hypothèse.

Ceci établi, supposons, pour fixer les idées, que le coefficient $BC - A^2$ de z ne soit pas nul. Le cylindre projetant la courbe Γ parallèlement à Oz a pour équation

$$(A^2 - BC)(Cx - Ay)^3 - D\,(Ax - By)\,[(Cx - Ay)^3 - (Ax - By)^3] = 0. \tag{6}$$

La courbe du quatrième ordre Γ possède donc un point triple à l'origine, les trois tangentes en ce point coïncidant avec la droite

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{C} = \frac{z}{B}. \tag{7}$$

La courbe Γ admet deux asymptotes réelles

$$\frac{x - 3A - BD}{B} = \frac{y - 3C - AD}{A} = \frac{z - 3B - CD}{C},$$

$$\frac{x - A + D(A - B)}{A - B} = \frac{y - C + D(C - A)}{C - A} = \frac{z - B + D(B - C)}{B - C},$$

et deux asymptotes imaginaires ayant pour équations

$$\frac{x - A\varepsilon^2 + D(A\varepsilon^2 - B)}{A - B\varepsilon} = \frac{y - C\varepsilon^2 + D(C\varepsilon^2 - A)}{C - A\varepsilon}$$

$$= \frac{z - B\varepsilon^2 + D(B\varepsilon^2 - C)}{B - C\varepsilon}$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité.

Lorsque D varie, c'est-à-dire lorsque le plan (2) se déplace parallèlement à lui-même, le plan de la courbe Γ reste fixe et cette courbe varie dans un faisceau.

3. Deuxième cas. Le plan (2) passe par l'origine ($D = 0$) et deux au moins des coefficients A, B, C sont différents.

Observons que l'origine est un centre pour la quadrique (1), par suite, le plan (2) est un plan diamétral et le pôle de ce plan appartient au plan de l'infini, sauf lorsque la quadrique (1) est un cône de sommet O ; il existe dans ce cas une droite des pôles passant par l'origine.

La quadrique (1) n'est un cône que pour α tendant vers l'infini. Ce cône a pour équation

$$x^2 + 2yz = 0$$

et la droite polaire du plan

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{8}$$

par rapport à ce cône est la droite (7) rencontrée plus haut.

Les paramètres directeurs du diamètre conjugué au plan (8) par rapport à la quadrique (1) où l'on suppose α fini et différent de 0, 1, sont

$$A\alpha - B, \qquad C\alpha - A, \qquad B\alpha - C.$$

Le lieu de ces diamètres est le plan (5). Par suite, dans le cas actuel, la courbe Γ se compose de la droite (7) et de la droite à l'infini du plan (5). C'est précisément la courbe que l'on obtient comme intersection du plan (5) et du cylindre (6) lorsque l'on pose $D = 0$.

4. Troisième cas. Les coefficients A, B, C du plan (2) sont égaux. Le plan

$$x + y + z + D = 0 \tag{9}$$

a pour pôles, par rapport à la quadrique (1) pour $\alpha = 1$,

$$(x + y + z)^2 = 1,$$

tous les points du plan

$$D(x + y + z) + 1 = 0. \tag{10}$$

En particulier, si $D = 0$, le plan (9) est le plan des centres de la quadrique et le plan (10) est le plan de l'infini.

Le lieu des pôles du plan (9) par rapport aux autres quadriques du système est, que D soit nul ou non, la droite

$$x = y = z,$$

c'est-à-dire la droite (7) pour $A = B = C$.

Le lieu des pôles d'un plan par rapport aux quadriques (1) *est donc une courbe plane du quatrième ordre, sauf lorsque le plan est parallèle au plan*

$$x + y + z = 0\,;$$

dans ce cas, le lieu se compose d'une droite

$$x = y = z$$

et d'un plan parallèle au plan envisagé.

5. Soit $P(x_0, y_0, z_0)$ un point distinct de l'origine. Les pôles du plan

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{11}$$

passant par P par rapport aux quadriques (1) sont, en général, situés dans le plan

$$(AB - C^2)\,x + (CA - B^2)\,y + (BC - A^2)\,z = 0.$$

Menons par P un plan parallèle à ce dernier plan,

$$(AB - C^2)(x - x_0) + (CA - B^2)(y - y_0) + (BC - A^2)(z - z_0) = 0. \quad (12)$$

Nous allons étudier la correspondance entre les plans (11) et (12).

Un calcul simple montre que le lieu des pôles, par rapport aux quadriques (1), du plan (12) est situé dans le plan parallèle au plan (11), mené par l'origine. Par suite, la correspondance entre les plans (11) et (12) est involutive.

Supposons que x, y, z soient les coordonnées d'un point fixe, distinct de P, et interprétons A, B, C comme coordonnées de plan dans la gerbe de sommet P. Au faisceau de plans (11) correspond un cône de seconde classe (12). Le cône (12) a trois plans tangents indépendants du choix du faisceau de plans (11), à savoir un plan réel et deux plans imaginaires conjugués, ayant pour équations

$$(x - x_0) + \varepsilon (y - y_0) + \varepsilon^2 (z - z_0) = 0, \quad (13)$$

où ε est une racine cubique de l'unité $\left(\varepsilon = 1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)$.

Lorsque le plan (11) coïncide avec un des plans (13), le plan homologue (12) est indéterminé. Ce résultat se justifie pour $\varepsilon = 1$ par les conclusions obtenues plus haut (4). Lorsque ε est une racine primitive de l'unité, le résultat se justifie de la même manière si l'on remarque que pour $\alpha = \varepsilon$, la quadrique (1) se décompose en deux plans parallèles, imaginaires conjugués, symétriques par rapport à l'origine.

Observons que la condition nécessaire et suffisante pour que le plan homologue du plan (11) coïncide avec le plan (13) est que

$$\frac{AB - C^2}{1} = \frac{CA - B^2}{\varepsilon} = \frac{BC - A^2}{\varepsilon^2},$$

c'est-à-dire

$$A + C\varepsilon + B\varepsilon^2 = 0.$$

Par suite, au plan (13) correspond tout plan passant par la droite

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{\varepsilon^2} = \frac{z - z_0}{\varepsilon}.$$

6. Proposons-nous maintenant de rechercher les plans (11) qui coïncident avec leurs homologues. Nous devons avoir

$$\frac{AB - C^2}{A} = \frac{CA - B^2}{B} = \frac{BC - A^2}{C}.$$

On trouve ainsi quatre plans : deux plans réels et deux plans imaginaires conjugués d'équations

$$2\varepsilon(x - x_0) - (y - y_0) + 2\varepsilon^2(z - z_0) = 0, \quad y - y_0 = 0. \tag{14}$$

7. Reprenons le plan (2) et les équations paramétriques (4) de la courbe Γ. Cette courbe étant du quatrième ordre rencontre le plan (2) en quatre points et par suite, il existe quatre quadriques (1) tangentes au plan (2), dans l'hypothèse où deux au moins des nombres A, B, C sont inégaux. Les paramètres α de ces quadriques satisfont à l'équation

$$D^2\alpha^4 - (A^2 + 2BC + D^2)\alpha + C^2 + 2AB = 0.$$

Lorsque le plan (2) est parallèle à l'un des plans (14), cette équation se réduit à

$$D^2\alpha(1 - \alpha^3) = 0$$

et les quadriques sont les quatre quadriques dégénérées du système (1).

8. Remarque. Plusieurs des résultats précédents peuvent s'obtenir en remarquant que le système de quadriques (1) découpe, sur le plan de l'infini, le faisceau tangentiel de coniques

$$\alpha(A^2 + 2BC) - (C^2 + 2AC) = 0;$$

A, B, C étant interprétés comme coordonnées homogènes d'une droite dans le plan de l'infini.