# L'INVOLUTION PLANE DE BERTINI,

par M. L. GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

Les courbes planes du sixième ordre $C_6$ ayant huit points doubles fixes forment un système linéaire $\infty^3$. Celles de ces courbes passant par un point P passent en conséquence par un second point P'. Il existe donc $\infty^2$ couples de points, chaque couple appartenant à $\infty^2$ courbes $C_6$. Ces $\infty^2$ couples de points forment une involution rencontrée par M. BERTINI (¹) et appelée involution de BERTINI. L'intérêt de cette involution réside dans ce fait que, par un théorème dû également à M. BERTINI, toute transformation birationnelle involutive

(¹) *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano* (Annali di Matematica, 1877, 2ᵉ série, t. VIII).

du plan peut se ramener, par une transformation birationnelle, à l'un des quatre types suivants [1] :

1⁰) Homologie harmonique ;

2⁰) Transformation de JONQUIÈRES, laissant invariant un faisceau de droites ;

3⁰) Involution de GEISER, dont les couples de points sont les intersections variables des cubiques planes passant par sept points fixes ;

4⁰) Involution de BERTINI.

Dans notre cours de géométrie supérieure, nous avons établi les propriétés de l'involution de BERTINI comme application de la représentation plane de la surface cubique. C'est cet exposé que nous reproduisons ici, dans l'espoir qu'il pourra intéresser les jeunes lecteurs de « *Mathesis* ».

Nous commencerons par étudier les cas où les huit points doubles des courbes $C_6$ sont distincts. Nous passerons ensuite aux autres cas.

**1.** — Considérons, dans un plan $\varpi$, les courbes du sixième ordre $C_6$ ayant huit points doubles fixes distincts $A_1, A_2, \ldots, A_8$. Supposons que ces courbes soient en général irréductibles ; il y a alors au plus six des points $A_1, A_2, \ldots, A_8$ situés sur une même conique et au plus trois de ces points sur une même droite. Deux courbes $C_6$ se rencontrent en quatre points variables et ces courbes forment donc un système linéaire $|C_6|$ de degré quatre.

La dimension du système $|C_6|$ est $r \geqslant 3$ ; nous allons voir que l'on a $r = 3$. Observons qu'il est toujours possible de trouver une droite ne contenant que deux des points $A_1, A_2, \ldots, A_8$, par exemple les points $A_7, A_8$. Les $\infty^{r-3}$ courbes $C_6$ passant par trois points de cette droite distincts de $A_7, A_8$, sont formées de la droite $A_7 A_8$ et de quintiques ayant six points doubles $A_1, A_2, \ldots, A_6$ et deux points simples $A_7, A_8$. Or, il ne peut exister une infinité de ces quintiques que si les six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ sont situés sur une même conique éventuellement dégénérée en deux droites contenant chacune trois des points. Dans tous les autres cas, on a une quintique isolée et par suite $r = 3$.

Par les huit points $A_1, A_2, \ldots, A_8$ passent $\infty^1$ cubiques $C_3'$ formant un faisceau et ayant encore en commun un neuvième point B. Si les six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ sont sur une conique, le point B se trouve sur la droite $A_7A_8$. On pourra toujours trouver une droite ne passant pas par B et ne contenant que deux des points $A_1, A_2, \ldots, A_8$. Soit par

[1] Pour la bibliographie de ces questions, voir par exemple : L. GODEAUX, *Les transformations birationnelles du plan*. Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. XXII (Paris, Gauthier-Villars, 1927).

exemple $A_5 A_6$ cette droite. Les points $A_1, A_2, A_3, A_5, A_7, A_8$ ne peuvent appartenir à une même conique, éventuellement dégénérée, sans quoi B appartiendrait à la droite $A_5 A_6$. Il suffira alors de reprendre le raisonnement précédent en remplaçant $A_7A_8$ par $A_5A_6$ pour voir que dans tous les cas, on a $r = 3$.

**2.** — Considérons les cubiques planes $C_3$ passant par les six points $A_1, A_2, ..., A_6$. Elles sont en général irréductibles et forment un système linéaire de dimension trois. En rapportant projectivement les courbes $C_3$ aux plans de l'espace, on obtient une surface cubique F dont les points correspondent birationnellement à ceux du plan $\varpi$ (¹).

A une courbe gauche d'ordre six, section de la surface F par une quadrique, correspond dans le plan une courbe d'ordre six ayant des points doubles en $A_1, A_2, ..., A_6$ (²). Inversement, à une courbe du sixième ordre de $\varpi$ passant doublement par $A_1, A_2, ..., A_8$ correspond la section de F par une quadrique. Par suite, si l'on désigne par $A'_7, A'_8$ les points de F qui correspondent à $A_7, A_8$ et par $\Gamma_6$ les courbes qui correspondent sur F aux courbes $C_6$, les courbes $\Gamma_6$ sont découpées sur F par les quadriques Q tangentes en $A'_7, A'_8$ à la surface.

Aux courbes du troisième ordre $C'_3$, passant par les huit points $A_1, A_2, ..., A_8$ et par B, correspondent les sections de F par les plans passant par la droite $p = A'_7A'_8$. Le point B', qui correspond à B sur F, appartient également à la droite $p$.

La droite $p$ ne peut appartenir à F, car pour cela il faudrait que les points $A_7, A_8$ soient situés sur une droite contenant deux des points $A_1, A_2, ..., A_6$ ou sur une conique contenant cinq de ces points, ce qui est impossible. On peut de plus supposer sans restriction que la droite $p$ n'est pas tangente à la surface F. Les points $A'_7, A'_8$ sont en effet distincts comme le sont par hypothèse les points $A_7, A_8$ ; si la droite $p$ est tangente à F, le point de contact est $A'_7$ ou $A'_8$, par exemple

(¹) Voir par exemple : Enriques-Chisini, *Courbes et fonctions algébriques d'une variable* (trad. Légaut). (Paris, Gauthier-Villars, 1926) ou Bertini, *Complementi di geometria proiettiva* (Bologne, Zanichelli, 1928). Voir également L. Godeaux, *Sur les courbes planes du sixième ordre* (Mathesis, 1924, pp. 295-299), *Sur les faisceaux de courbes planes du sixième ordre de Halphen* (Mathesis, 1925, pp. 154-157).

(²) Ce point peut s'établir de la manière suivante : Soient Q une quadrique, $a$ et $a'$ deux de ses génératrices rectilignes d'un mode, $b$, $b'$ deux génératrices rectilignes du second mode. La quadrique Q appartient au faisceau déterminé par la quadrique formée des plans $ab$ et $a'b'$, et par la quadrique formée des plans $ab'$, $a'b$. Par suite, à la courbe du sixième ordre découpée par Q sur la surface F correspond dans le plan une courbe du sixième ordre appartenant à un faisceau déterminé par deux courbes formées chacune de deux des cubiques $C_3$. Cette courbe du sixième ordre a donc des points doubles en $A_1, A_2, ..., A_6$.

$A'_8$. Cela signifie que les cubiques planes $C'_3$ passant par les points $A_1$, $A_2$, ..., $A_8$, ont une tangente fixe en ce dernier point (le point B étant infiniment voisin de $A_8$ sur cette tangente). Il suffira alors, dans les raisonnements précédents, de permuter les rôles du point $A_8$ et de l'un des points $A_1$, $A_2$, ..., $A_6$ pour obtenir une droite $p$ non tangente à la surface F [1].

Considérons une quadrique Q tangente à F en $A'_7$, $A'_8$ et les sections (F, $\alpha$), (Q, $\alpha$) de F, Q par un plan $\alpha$ passant par p. La conique (Q, $\alpha$) est tangente en $A'_7$, $A'_8$ à la cubique(F, $\alpha$) et rencontre encore cette courbe en deux points $P'_1$, $P'_2$. Considérons, dans le plan $\alpha$, le faisceau de cubiques planes déterminé par la cubique (F, $\alpha$) et par la cubique formée de la droite $P'_1P'_2$ et de la droite $p$ comptée deux fois. Une des cubiques de ce faisceau contient la conique (Q ,$\alpha$) et est complétée par la tangente en B' à la courbe(F, $\alpha$). Par suite, la droite $P'_1$ $P'_2$ passe constamment par le point T où cette tangente rencontre encore (F, $\alpha$) en dehors de B', lorsque la quadrique Q varie. Lorsque le plan $\alpha$ varie, le point T décrit la courbe (F, $\beta$)section de F par le plan tangent $\beta$ à F en B'. Cette courbe possède en général un point double en B et par suite le lieu de la droite $P'_1$ $P'_2$ est la congruence G d'ordre un et de classe trois, ayant comme lignes singulières la droite $p$ et la courbe (F, $\beta$).

Cela étant, les quadriques tangentes à F en $A'_7$, $A'_8$ et passant par $P'_1$ forment un réseau. Dans ce réseau, sont comprises $\infty^1$ quadriques formées du plan $\alpha$ et d'un plan variable passant par $p$. Les quadriques de ce réseau passent donc toutes par la conique (Q, $\alpha$). En d'autres termes les courbes $\Gamma_6$ passant par $P'_1$ passent en conséquence par $P'_2$. Si nous désignons par $P_1$, $P_2$ les points du plan $\varpi$ correspondant respectivement à $P'_1$, $P'_2$, nous obtenons donc le résultat suivant : Il existe $\infty^2$ couples de points $P_1$, $P_2$ du plan $\varpi$ tels que les courbes $C_6$ passant par un point d'un de ces couples passent en conséquence par le second. Ces $\infty^2$ couples de points forment l'involution de Bertini. Les raisonnements précédents montrent que les points d'un couple appartiennent à une même cubique $C'_3$ passant par $A_1$, $A_2$, ..., $A_8$.

*Sur la surface cubique* F, *les couples de points de l'involution de* Bertini *sont découpés par les droites s'appuyant sur une droite $p$ n'appartenant pas à* F, *et sur la section de F par le plan tangent à cette surface en un point appartenant à p.*

---

[1] Intervertissons par exemple les rôles de $A_1$, $A_7$ et changeons de notation, les cubiques $C'_3$ ayant alors par hypothèse même tangente en $A_1$. On sait qu'aux points infiniment voisins de $A_1$ dans le plan $\varpi$ correspondent, sur F, les points d'une droite $a_1$. Le point B se trouvera alors sur la droite $a_1$.

3. — Cherchons sur la surface F, le lieu des couples de points $P'_1$, $P'_2$ coïncidants. La droite $P'_1P'_2$ est alors tangente à la courbe (F, $\alpha$) et les points cherchés se trouvent donc sur la conique polaire $\gamma$ de T par rapport à (F, $\alpha$). Cette conique $\gamma$ est tangente à (F, $\alpha$) et par suite à F au point T. Le nombre des coniques $\gamma$ passant par un point $P'$ de $p$ est égal au nombre de points de rencontre de la courbe (F, $\beta$) et du plan polaire de $P'$ par rapport à F, c'est-à-dire à trois. Le lieu des coniques $\gamma$ est donc une surface du cinquième ordre $\Phi$, passant trois fois par $p$ et tangente à F le long de la courbe (F, $\beta$). L'intersection des surfaces F, $\Phi$ est une courbe du quinzième ordre composée de la cubique (F, $\beta$) comptée deux fois et d'une courbe $\Gamma_9$, d'ordre neuf, lieu des points unis de l'involution de Bertini sur la surface F.

Aux points infiniment voisins de $A_1$, dans le plan $\varpi$, correspondent les points d'une droite $a_1$ de F. La courbe $\Gamma_9$ rencontre la droite $a_1$ en trois points, par suite, si nous désignons par $C_9$ la courbe du neuvième ordre qui correspond à $\Gamma_9$ dans le plan $\varpi$, cette courbe a un point triple en $A_1$ et de même en $A_2$, $A_3$, ..., $A_6$.

La droite $p$ étant triple pour $\Phi$, les points $A'_7$, $A'_8$ sont triples pour $\Gamma_9$ et les points $A_7$, $A_8$ sont triples pour $C_9$.

Le point T étant le tangentiel de $B'$ sur la cubique (F, $\alpha$), toutes les coniques $\gamma$ passent par $B'$ et ce point est donc quadruple pour la surface $\Phi$. Le cône des tangentes à $\Phi$ en $B'$ est du quatrième ordre et touche les deux branches de la courbe (F, $\beta$) en $B'$. Par suite, le point $B'$ n'appartient pas à la courbe $\Gamma_9$, ni le point B à la courbe $C_9$.

*Le lieu des points unis de l'involution de* Bertini *est une courbe d'ordre neuf passant trois fois par chacun des points* $A_1$, $A_2$, ..., $A_8$.

4. — Les points $A_1$, $A_2$, ..., $A_8$ étant toujours distincts, la congruence lieu des droites $P'_1P'_2$ peut-elle se réduire à la gerbe de sommet $B'$ ? Pour qu'il en soit ainsi, il faut que sur chacune des courbes (F, $\alpha$), le point T coïncide avec le point $B'$, c'est-à-dire que $B'$ soit un point d'inflexion de cette courbe pour toutes les positions du plan $\alpha$. On sait que, dans ces conditions, le plan $\beta$ tangent à F en $B'$ doit rencontrer cette surface suivant trois droites passant par $B'$.

Supposons en premier lieu que $B'$ n'appartienne pas à une des droites de F qui correspondent aux points $A_1$, $A_2$, ..., $A_6$. Soient $b'_1$ $b'_2$, $b'_3$ les trois droites passant par $B'$ et formant l'intersection de F et du plan $\beta$. A ces droites correspondent, dans le plan $\varpi$, soient les droites passant par deux des points $A_1$, $A_2$, ..., $A_6$, soient des coniques passant par cinq de ces points. D'autre part, l'ensemble des trois courbes ainsi obtenues doit former une cubique $C_3$, donc ces trois courbes sont des droites ayant en commun le point B. Soient $b_1 = A_1A_4$,

$b_2 = A_2A_5$, $b_3 = A_3A_6$ les droites du plan $\varpi$, appartenant à un même faisceau de sommet B, qui correspondent respectivement aux droites $b'_1$, $b'_2$, $b'_3$. Considérons la section de F par le plan contenant $p$ et $b'_1$; c'est une courbe formée de la droite $b'_1$ et d'une conique $\gamma'_1$ passant par $A'_7$, $A'_8$. A cette conique correspond dans le plan $\varpi$ une conique $\gamma_1$ contenant les points $A_2$, $A_3$, $A_5$, $A_6$, $A_7$, $A_8$. Il existe $\infty^2$ quadriques Q tangentes à F en $A'_7$, $A'_8$, contenant $\gamma_1$ ; les courbes $C_6$ correspondant aux sections de F par ces quadriques sont formées de la conique $\gamma_1$ et de quartiques ayant des points doubles en $A_1$, $A_4$, des points simples en $A_2$, $A_3$, $A_5$, $A_6$, $A_7$, $A_8$.

En considérant de même les plans passant par $b'_2$ et $p$, par $b'_3$ et $p$, on obtient deux coniques $\gamma_2$, $\gamma_3$ du plan $\varpi$ contenant la première les points $A_1$, $A_3$, $A_4$ $A_6$, $A_7$, $A_8$, la seconde les points $A_1$, $A_2$, $A_3$ $A_5$, $A_7$, $A_8$.

Il est aisé de voir que le cas étudié ici peut effectivement se présenter. Dans le plan $\varpi$, menons les trois droites $b_1$, $b_2$, $b_3$ passant par B et choisissons $A_3$, $A_6$ sur $b_3$. Par ces points menons deux coniques $\gamma_1$, $\gamma_2$ et soient $A_7$, $A_8$ leurs deux autres points d'intersection. Les points d'intersection de $\gamma_1$ et de $b_2$ seront les points $A_2$, $A_4$ ; ceux de $\gamma_2$ et $b_1$, les points $A_1$, $A_3$. La cubique formée de $b_1$ et $\gamma_1$ et celle formée par $b_2$ et $\gamma_2$ déterminent un faisceau de courbes en général irréductibles. Une courbe de ce faisceau comprend la droite $b_3$ et est complétée par une conique $\gamma_3$ passant par $A_1$, $A_2$, $A_4$, $A_5$, $A_7$, $A_8$. La surface cubique F existe et par suite le système $|C_6|$ également.

Observons que la quadrique polaire de $B'$ par rapport à F est actuellement formée du plan $\beta$ et d'un plan $\beta'$ ne passant pas en général par $B'$. La courbe $C_9$, lieu des points unis de l'involution de Bertini dans le plan se compose actuellement de trois coniques $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ et de la cubique $C_3$ qui correspond à la section $(F, \beta')$ de F par le plan $\beta'$.

5. — Supposons maintenant que le point $B'$ appartienne par exemple à la droite $a_1$ de F qui correspond au point $A_1$. Les cubiques $C_3$ passant par $A_1$, $A_2$, ..., $A_8$ ont une tangente fixe en $A_1$ ; le point B est infiniment voisin de $A_1$ sur cette tangente.

Soient $b'_1$, $b'_2$ les droites de F passant par $B'$ et qui, avec $a_1$, forment l'intersection du plan $\beta$ avec la surface. Considérons tout d'abord le plan contenant $a_1$ et $p$. L'intersection de F par ce plan se compose de $a_1$ et d'une conique $\gamma_1$ passant par $A'_7$, $A'_8$. On sait qu'à cette conique correspond, dans le plan $\omega$, une cubique $\gamma$ ayant un point double en $A_1$ et passant par $A_2$, $A_3$, ..., $A_6$.

Aux droites $b_1$, $b_2$ correspondent, dans le plan $\varpi$, soient des droites passant par $A_1$ et par un des points $A_2$, $A_3$, ..., $A_6$, soient des coniques passant par $A_1$ et par quatre de ces derniers points. Comme l'ensemble des deux courbes ainsi obtenues forme une cubique $C_3$ ayant un point double en $A_1$, l'une des courbes est une droite, l'autre une conique. Pour fixer les idées, nous supposerons qu'à $b'_1$ correspond une droite $b_1$ passant par $A_1$, $A_2$ et à $b'_2$ une conique $b_2$ passant $A_1$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$. La droite $b_1$ et la conique $b_2$ doivent passer par le point B infiniment voisin de $A_1$, c'est-à-dire qu'elles sont tangentes en $A_1$.

La section de F par le plan passant par $p$ et $b'_1$ est complétée, par une conique $\gamma_1$ qui passe par $A'_7$, $A'_8$. Il lui correspond, sur $\varpi$, une courbe qui, avec $b_1$, forme une cubique $C'_3$ ; cette courbe est donc une conique $\gamma_1$ passant par $A_3$, $A_5$, ..., $A_8$. La section de F par le plan contenant $p$ et $b'_2$ est complétée par une conique $\gamma'_2$ qui passe par $A'_7$, $A'_8$ et à laquelle correspond, dans $\varpi$, une courbe qui, avec la conique $b_2$, forme une cubique $C'_3$ ; cette courbe est donc une droite passant par $A_2$, $A_7$, $A_8$. On observera que la cubique $\gamma$ passe également par $A_7$, $A_8$.

Inversement, prenons dans le plan $\varpi$ deux coniques $b_2$, $\gamma_1$ se rencontrant en quatre points $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$. Prenons ensuite une cubique $\gamma$ passant par ces quatre points et ayant un point double en un point $A_1$ de $b_2$, Soient $A_7$, $A_8$ les points de rencontre ultérieurs des courbes $\gamma$, $\gamma_1$. Le point $A_2$ sera l'intersection de la droite $A_7$ $A_8$ et de la tangente en $A_1$ à la conique $b_2$. En partant des points $A_1$, $A_2$, ..., $A_6$, on construira la surface F et par suite le système $|C_6|$ dont l'existence est ainsi établie dans la cas étudié.

La quadrique polaire de $B'$ par rapport à F se compose du plan $\beta$ et d'un second plan $\beta'$. Si l'on observe que les coniques $\gamma'$, $\gamma'_1$, $\gamma'_2$ appartiennent chacune à $\infty^2$ quadriques Q touchant F en $A'_7$, $A'_8$, on voit que la courbe $C_9$, lieu des points unis de l'involution de Bertini dans le plan $\varpi$, se compose de la droite $A_7$, $A_8$ (passant par $A_2$), de la conique $\gamma_1$, de la cubique $\gamma$ et de la cubique $C_3$ qui correspond à la section (F, $\beta'$) de F par le plan $\beta'$.

*(A suivre.)*