SUR LES HOMOGRAPHIES SPATIALES N'AYANT QUE DEUX DROITES UNIES,

par L. Godeaux, Professeur à l'Université de Liège.

On sait que les homographies réelles non identiques de l'espace sont de dix-neuf espèces [1] :

Les homologies générales ou spéciales (deux espèces) ;

Les homographies biaxiales hyperboliques, paraboliques ou elliptiques (trois espèces) ;

Les homographies axiales générales ou spéciales (cinq espèces) ;

Les homographies n'ayant qu'un nombre fini (non nul) de points (et de plans) unis (sept espèces) ;

Les homographies non biaxiales dépourvues de points (et de plans) unis (deux espèces).

Les homographies des deux dernières espèces ont soit deux droites unies gauches, soit une seule droite unie. Nous nous proposons d'établir quelques propriétés des homographies ayant deux droites unies, relatives aux quadriques passant par ces deux droites.

1. Soit Ω une homographie de l'espace dépourvue de points et de plans unis, ayant deux droites unies gauches r_1, r_2. Sur chacune des droites unies, Ω détermine une projectivité elliptique. Soient ω_1, ω_2 les projectivités déterminées respectivement sur r_1, r_2. Dans les faisceaux de plans d'axes r_1, r_2, Ω détermine de même des projectivités elliptiques qui sont respectivement les projections de ω_2, ω_1.

Nous nous proposons d'examiner la question suivante : Les projectivités ω_1, ω_2 peuvent-elles être projectivement identiques, c'est-à-dire, peut-il exister entre les ponctuelles r_1, r_2 une projectivité Θ telle que l'on ait.

$$\omega_2 = \Theta^{-1}\omega_1\Theta \ ?$$

Cette question peut être posée sous une autre forme. Observons qu'à une droite a s'appuyant sur r_1, r_2, Ω fait correspondre une droite a', toujours distinctes de a, s'appuyant également sur r_1, r_2. Cela étant, si la projectivité Θ existe, le lieu des droites joignant les points de r_1, r_2 homologues dans cette projectivité est une quadrique Q passant

---

[1] Voir par exemple : C. Servais, *sur les faisceaux de surfaces du second ordre* (Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, 1904). L. Godeaux, *Cours de Géométrie projective* (Liège, Autographie Pholien, 1927). (L. G.)

Quand on ne distingue pas les éléments réels des éléments imaginaires, le nombre des collinéations entre deux espaces de même support se réduit à quatorze; Voir Ad. Mineur, *Cours de Géométrie projective*, t. III, nouvelle édition, Bruxelles, Van Dyl. (Ad. M.)

par r_1, r_2. Soit a une génératrice rectiligne de cette quadrique s'appuyant en A_1 sur r_1 et en A_2 sur r_2. Aux points A_1, A_2, ω_1 et ω_2 font correspondre des points A'_1, A'_2, de r_1, r_2 respectivement. Les points A_1, A_2 étant homologues dans Θ, il en est de même des points A'_1, A'_2 et la droite $a' \neq A'_1A'_2$ est une génératrice de Q de même mode que a. La quadrique Q est donc tranformée en elle-même par Ω.

Inversement, s'il existe une quadrique (réelle) Q passant par r_1, r_2 et tranformée en elle-même par Ω, il existe une projectivité Θ entre les ponctuelles r_1, r_2, satisfaisant aux conditions énoncées plus haut. La question posée peut donc s'énoncer sous cette forme : Peut-il exister une quadrique (réelle) passant par r_1, r_2, transformée en elle-même par Ω ?

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes : Nous désignerons par Q les quadriques réelles passant par r_1, r_2. Nous dirons que les génératrices rectilignes d'une de ces quadriques de même mode que r_1, r_2 sont du premier mode, les autres du second mode. Une quadrique transformée en elle-même par une homographie sera appelée quadrique unie de cette homographie. De même, un faisceau de quadriques tranformé en lui-même par une homographie sera appelé faisceau uni de celle-ci.

2. Supposons qu'il existe une quadrique Q unie pour l'homographie Ω. Dans le système des génératrices du second mode de Q, Ω détermine une projectivité ω dont la section par r_1 est ω_1. Par suite, la projectivité ω est elliptique.

Soient P, P' deux points de Q homologues dans l'homographie Ω, r, r' les génératrices du premier mode de Q passant respectivement par P, P'. Les génératrices r, r' sont distinctes, car autrement r serait une droite unie de Ω et celle-ci serait une homographie biaxiale elliptique. Dans le système des génératrices du premier mode de Q, Ω détermine donc une homographie non identique ω'. Cette projectivité ω' possède r_1, r_2 comme rayons unis et est donc hyperbolique.

Désignons par p, p' les génératrices du second mode de Q passant respectivement par P, P' et soient P_1 le point de rencontre de r, p' et P_2 celui de r', p.

Il existe une homographie biaxiale hyperbolique Ω_1, bien déterminée, ayant r_1, r_2 comme axes et faisant correspondre P_2 à P. Dans cette homographie Ω_1, r' correspond à r. Cela étant, considérons l'homographie (1)

$$\Omega_2 = \Omega_1^{-1}\,\Omega$$

(1) Dans un produit d'homographies, nous indiquons de droite à gauche les homographies qui doivent être effectuées successivement.

Au point P, Ω_2 fait correspondre le point P_1. La quadrique $\underset{\sim}{Q}$ est unie pour Ω_1 et par suite pour Ω_2. L'homographie Ω_1 détermine la projectivité ω' dans le système des génératrices du premier mode de Q et la projectivité identique dans le système des génératrices du second mode. Par suite, Ω_2 détermine la projectivité identique dans le système de génératrices du premier mode et la projectivité ω dans le le système des génératrices du second mode. L'homographie Ω_2 déterminant les projectivités elliptiques ω_1, ω_2 sur r_1, r_2 ne peut posséder de plans unis, ni corrélativement de points unis. De plus, cette homographie possède les droites unies r_1, r_2, r et est donc biaxiale elliptique.

On observera que les homographies Ω_1, Ω_2 sont permutables et que par suite on a

$$\Omega = \Omega_2\Omega_1 = \Omega_1\Omega_2.$$

3. Inversement, soit Ω_1 une homographie biaxiale hyperbolique ayant pour axes r_1, r_2 et Ω_2 une homographie biaxiale elliptique pour laquelle r_1, r_2 sont des droites unies. L'homographie $\Omega = \Omega_2 \Omega_1$ possède r_1, r_2 comme droites unies et détermine sur ces droites et dans les faisceaux de plans ayant ces droites comme axes, les mêmes projectivités elliptiques que Ω_2. Par suite, l'homographie Ω ne peut posséder ni points ni plans unis. Supposons que Ω puisse posséder une droite unie r, distincte de r_1, r_2. La droite r ne peut s'appuyer sur r_1 ou r_2, car le point d'appui serait uni pour Ω, ce qui est impossible ; la droite r ne peut donc être unie pour Ω_1. Soit r' la droite que Ω_1 fait correspondre à r. Les droites r, r' sont sur une quadrique $\underset{\sim}{Q}$ et Ω_2 doit doit faire correspondre r à r'.

Soient p une génératrice du second mode de $\underset{\sim}{Q}$, p' la droite que Ω_2 lui fait correspondre, p'' l'homologue de p'. Puisque p s'appuie sur r_1, r_2, r', il faut que p' s'appuie sur r_1, r_2, r et soit donc une génératrice du second mode de $\underset{\sim}{Q}$. Il en est de même de p'' pour la même raison. Au point $P = pr$, Ω_1 fait correspondre $P_1 = pr'$ et à ce point, Ω_2 fait correspondre $P' = p'r$. La droite PP' est donc unie pour Ω_2 et ne peut d'ailleurs appartenir à $\underset{\sim}{Q}$. D'autre part, cette droite P_1P' rencontrant p' doit rencontrer p''. Si p'' est distincte de p, la droite $P_1 P'$ appartient à $\underset{\sim}{Q}$, donc p'' doit coïncider avec p et Ω_2 est involutive. Désignons par Q_1 la quadrique $\underset{\sim}{Q}$ lieu de la droite P_1P' lorsque P parcourt p. Cette quadrique est unie pour Ω_1, Ω_2 et par suite pour Ω ; il est facile d'en conclure que les homographies Ω_1, Ω_2 sont permutables. Cela étant, r étant unie pour Ω, l'est aussi pour Ω^2, Or, on a

$$\Omega^2 = \Omega_2\Omega_1\Omega_2\Omega_1 = \Omega_1\Omega_2^2\Omega_1 = \Omega_1^2.$$

Il faut donc, pour que r soit unie pour Ω, que Ω_1 soit involutive (homographie biaxiale harmonique). Dans ce cas, Ω est biaxale elliptique (et d'ailleurs involutive). Dans le cas où Ω_1, Ω_2 ne sont pas toutes deux involutives, Ω ne possède que deux droites unies r_1, r_2. Plaçons-nous dans cette hypothèse : Toutes les quadriques Q sont unies pour Ω_1. Par un point P n'appartenant pas à r_1, r_2, passe une droite unie pour Ω_2 et la quadrique Q passant par cette droite est unie pour Ω_2 et par suite pour Ω. Il existe donc au moins une projectivité θ transformant l'une dans l'autre les projectivités elliptiques déterminées par Ω sur r_1, r_2.

Les raisonnements précédents prouvent que la question posée plus haut doit être résolue par l'affirmative.

4. Reprenons l'homographie $\Omega = \Omega_2\Omega_1$, produit de l'homographie biaxiale hyperbolique Ω_1 et de l'homographie biaxiale elliptique Ω_2, ces deux dernières homographies n'étant pas toutes deux involutives. Soient p une droite s'appuyant sur r_1, r_2 ; p' la droite que Ω et Ω_2 lui font correspondre ; p'' la droite homologue de p'. Comme nous venons de le voir, par un point P de p et par suite par p passe une quadrique Q unie pour Ω_2 et par suite pour Ω. Les quadriques Q unies pour Ω sont les quadriques unies pour Ω_2 et par suite par un point arbitraire de l'espace passe au moins une quadrique Q unie pour Ω. Nous allons voir dans quelles conditions il peut en passer plus d'une.

Soit r la droite unie pour Ω_2 passant par P et désignons par Q_0 la quadrique Q contenant cette droite et par suite p, p', p''. Supposons qu'il passe une seconde quadrique Q unie pour Ω_2 par P (et p) et désignons-la par Q_1. La quadrique Q_1 contenant p, doit contenir p' et p''; pour qu'elle soit distincte de Q_0, il faut donc que p'' coïncide avec p et que Ω_2 soit involutive. Plaçons-nous dans ce cas et observons que toutes les génératrices du premier mode de la quadrique Q_0 sont unies pour Ω_2. Au contraire, si P' est le point de p' que Ω_2 fait correspondre à P, à la génératrice s du premier mode de Q_1 passant par P correspond, dans Ω_2, la génératrice du même mode s' passant par P' ; par suite Ω_2 détermine une projectivité dans les génératrices du premier mode de Q_1. Cette projectivité possède comme éléments unis r_1 et r_2, elle est donc hyperbolique. Cela étant, soit Ω_1' l'homographie biaxiale hyperbolique ayant r_1, r_2 comme axes et faisant correspondre le point P au point ps'. L'homographie $\Omega_1' \, \Omega_2$ possède comme droites unies r_1, r_2 et s ; elle détermine sur r_1, r_2 des involutions elliptiques Ω_1, Ω_2, par suite elle est dépourvue de plans et (corrélativement) de points unis ; c'est donc une homographie biaxiale elliptique. D'après ce qu'on a vu plus haut (**3**), il faut que Ω_1' soit involutive. On en déduit qu'il ne peut exister une troisième quadrique Q passant par p, p', unie pour Ω_2, car les génératrices du premier mode de cette quadrique devraient être unies pour $\Omega_1' \Omega_2$, puisque Ω_1' est l'unique homographie biaxiale harmonique ayant comme axes r_1, r_2. De tout ceci, on conclut que si Ω_2 est involutive, par tout point de l'espace passent deux quadriques unies pour Ω et deux seulement.

Considérons maintenant, toujours dans l'hypothèse où Ω_2 est involutive, une quadrique Q non unie pour cette homographie. Cette quadrique établit une projectivité θ entre les ponctuelles r_1, r_2 et cette projectivité fait correspondre à l'involution elliptique ω_1 de r_1, une involution elliptique ω_2' sur r_2. Les involutions elliptiques ω_2, ω_2' ont certainement un couple commun, par suite il existe sur Q deux génératrices du second mode p, p' homologues dans Ω_2. Il en résulte que l'homographie Ω_2 fait correspondre à Q une quadrique Q' passant par p, p'. Dans le faisceau déterminé par Q, Q', Ω_2 et par suite Ω détermine une involution hyperbolique, car par p, p' passent deux quadriques Q_0, Q_1 unies.

Représentons les quadriques Q par les points (réels) d'un espace à trois dimensions Σ. A Ω correspond une homographie Ω' de Σ. D'après ce qui précède, par tout point de Σ passe une droite unie pour Ω' et cette droite contient deux points unis. Par suite Ω' est une homologie ou une homographie biaxiale hyperbolique. Le premier cas ne peut se présenter, car il devrait exister une infinité de faisceaux de quadriques Q toutes unies pour Ω. On en conclut qu'il existe deux faisceaux $|Q_0|$, $|Q_1|$ de quadriques Q toutes unies pour Ω. Ces faisceaux correspondent aux axes de Ω'.

5. Envisageons le cas où Ω_2 n'est pas involutive. Alors, par un point P passe une seule quadrique Q_0 unie pour Ω et ces quadriques forment un faisceau $|Q_0|$. Ces quadriques n'ont d'ailleurs en commun que les deux droites réelles r_1, r_2.

Soient p une droite s'appuyant sur r_1, r_2 et p', p'', p''' les droites que Ω lui fait successivement correspondre. A la quadrique Q_2 passant par p, p', p'', Ω fait correspondre une quadrique Q_2' passant par p', p'', p'''. A une quadrique Q passant par p', p'', Ω fait correspondre une quadrique Q passant par p'', p''' mais non par p' en général. Par suite le faisceau de quadriques Q déterminé par Q_2, Q_2' n'est pas en général uni pour Ω.

Représentons encore les quadriques Q par les points de l'espace Σ et soit encore Ω' l'homographie de cet espace qui correspond à Ω. L'homographie Ω' possède un axe (droite de points unis) correspondant au faisceau $|Q_0|$. D'autre part, Ω' ne peut être biaxiale, car par un point de Σ ne passe pas en général une droite unie, par suite Ω' est une homographie axiale. Comme il n'y a pas de quadrique Q unie en dehors du faisceau $|Q_0|$, Ω' est axiale elliptique. Cette homographie possède donc une droite unie ne coupant pas l'axe et sur laquelle elle détermine une projectivité elliptique. On en déduit qu'il existe un faisceau $|Q_1|$ de quadriques Q, n'ayant aucune quadrique en commun avec $|Q_0|$, uni pour Ω et dans lequel cette homographie détermine une projectivité elliptique.

6. — Le fait que la question posée plus haut a reçu une réponse affirmative implique une seconde question : Existe-t-il des homographies Ω pour lesquelles aucune quadrique Q n'est unie ? Cette question doit également être résolue affirmativement.

Considérons, en effet, sur une droite ne s'appuyant ni sur r_1, ni sur r_2, trois points A, A', B et soient a, a', b les droites passant par ces points et s'appuyant sur r_1, r_2 ; A_1, A'_1, B_1 les points d'appui de a, a', b sur r_1 ; A_2, A'_2, B_2 les points d'appui de ces droites sur r_2. Choisissons en outre sur r_1 trois points B'_1, C_1, C'_1 et sur r_2 trois points B'_2, C_2, C'_2 satisfaisant aux conditions suivantes.

1° Les projectivités

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A'_1 & B'_1 & C_1 \end{pmatrix}, \qquad \omega_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 \end{pmatrix}$$

sont elliptiques et l'une d'elles au moins n'est pas involutive ;

2° La droite $B'_1 B'_2$ ne s'appuie pas sur la droite AA'.

L'homographie

$$\Omega = \begin{pmatrix} A & B_1 & C_1 & B_2 & C_2 \\ A' & B'_1 & C'_1 & B'_2 & C'_2 \end{pmatrix}$$

a comme droites unies r_1, r_2. Elle détermine sur ces droites des projectivités elliptiques, donc elle ne peut avoir de plans unis. Corrélativement, elle ne peut avoir de points unis. Ce n'est pas une homographie biaxiale elliptique, car la droite AA' s'appuyant sur B_1B_2 mais non sur $B'_1B'_2$, n'est pas unie. Ω est donc bien une homographie du type envisagé dans cette note.

On peut d'autre part choisir ω_1, ω_2 de façon à ce que ces projectivités ne soient pas projectivement identiques. Il suffit par exemple de choisir pour ω_1 une involution et pour ω_2 une projectivité non involutive.

7. — Nous allons montrer que s'il n'y a aucune quadrique Q unie pour Ω, il existe deux faisceaux de ces quadriques unis pour cette homographie (et dans chacun desquels celle-ci détermine une projectivité elliptique).

Plaçons-nous tout d'abord dans l'hypothèse où ω_1, ω_2 ne sont pas involutives. Il existe alors sur r_1 une seule involution elliptique I_1

---

(1) Voir, par exemple, F. Severi, *Geometria proiettiva*, 2e édition Florence, Vallechi, 1926, pp. 121-124.

permutable avec ω_1 et sur r_2, une et une seule involution elliptique I_2 permutable avec ω_2 [1]. Soit $A_1A'_1$ un couple de I_1 ; on sait qu'il existe un et un seul couple $B_1B'_1$ de I_1 partageant harmoniquement $A_1A'_1$. Soient $A_2A'_2$ un couple de I_2, $B_2B'_2$ le couple de I_2 partageant harmoniquement $A_2A'_2$. L'homographie biaxiale harmonique ayant pour axes A_1A_2, $A'_1A'_2$, fait se correspondre les points B_1 et B'_1, B_2 et B'_2 et par suite les droites B_1B_2 et B'_1B_2. Il en résulte que les quatre droites A_1A_2, $A'_1A'_2$, $B'_1B'_2$ se trouvent sur une même quadrique Q_0. Il existe une homographie biaxiale elliptique involutive Ω'_2 ayant pour droites unies les génératrices du premier mode de Q_0 et déterminant sur r_1, r_2 les involutions I_1, I_2. D'après ce qu'on a vu plus haut, il existe deux faisceaux de quadriques Q unies pour Ω'_2 ; désignons-les par $|Q_0|$, $|Q_1|$

Considérons une quadrique Q_0 et sur celle-ci, deux couples de génératrices du second mode a et a', b et b' homologues dans Ω'_2. A ces génératrices, Ω fait correspondre les droites a_1, a'_1, b_1, b'_1 qui forment deux couples de droites a_1 et a'_1, b_1 et b'_1 homologues dans Ω'_2. Ces droites appartiennent à une quadrique Q'_0 de $|Q_0|$, distincte de Q_0, sans quoi Ω admettrait des quadriques unies contrairement à l'hypothèse. Les faisceaux $|Q_0|$, $|Q_1|$ sont donc unis pour Ω. On peut d'ailleurs observer que Ω et Ω_2 sont permutables.

Lorsque l'une des projectivités ω_1, ω_2, par exemple ω_1, est involutive, il suffit de reprendre le même raisonnement en remplaçant I_1 par ω_1. On parvient de même à l'existence de deux faisceaux unis de quadriques Q.

On observera que si l'on représente les quadriques Q par les points de Σ, à Ω correspond une homographie Ω' de Σ de même espèce que Ω.

8. — On peut résumer les résultats précédents dans l'énoncé suivant.

Si Ω est une homographie spatiale n'ayant aucun point ni aucun plan unis, mais possédant deux droites unies r_1, r_2 il existe deux faisceaux de quadriques passant par ces droites unis pour cette homographie. Dans chacun de ces faisceaux, Ω détermine une projectivité elliptique ou la projectivité identique.

Si les quadriques d'un et d'un seul des faisceaux sont unies, Ω est le produit d'une homographie biaxiale hyperbolique ayant pour axes r_1, r_2, *par une homographie biaxiale elliptique non involutive .*

Si les quadriques des deux faisceaux sont unies, Ω est le produit d'une

---

[1] Si A est un point d'une ponctuelle s, A_1 et A_{-1} les points qu'une projectivité elliptique ω et son inverse ω^{-1} lui font correspondre, l'involution elliptique I permutable avec ω fait correspondre à A son conjugué harmonique par rapport à A_1, A_{-1}.

homographie biaxiale hyperbolique non involutive ayant r_1, r_2 *comme axes, par une homographie biaxiale elliptique involutive* (1).

On observera que le fait que s'il y a une quadrique unie pour Ω, il y en a une infinité, permet de conclure que :

Etant données deux projectivités elliptiques sur deux ponctuelles, s'il existe entre celles-ci une projectivité transformant l'une des projectivités elliptiques dans l'autre, il en existe une infinité.

9. — Les questions traitées ci-dessus peuvent naturellement être étudiées par la géométrie analytique. Bornons-nous à quelques brèves indications.

Par un choix convenable du tétraèdre de référence, l'homographie Ω peut être représentée par les équations.

$$\rho x_1' = \alpha x_1 - \beta x_2, \quad \rho x_2' = \beta x_1 + \alpha x_2,$$
$$\rho x_3' = \alpha' x_3 - \beta' x_4, \quad \rho x_4' = \beta' x_3 + \alpha' x_4,$$

où α, β, α', β', sont des nombres réels, $\beta\beta'$ n'étant pas nul. Les droites unies sont

$$x_3 = x_4 = 0, \qquad x_1 = x_2 = 0.$$

Pour qu'il existe une quadrique Q unie pour Ω, il faut que l'une des relations

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0, \qquad \alpha\beta' + \alpha'\beta = 0 \tag{1}$$

au moins soit satisfaite. Si elles le sont toutes deux, on a $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$ et les projectivités ω_1, ω_2 sont involutives. Si une seule des relations (1) est satisfaite, il suffit de supposer que c'est la première, car la seconde se ramène à la première en remplaçant β' par $-\beta'$. Supposons donc

$$\alpha' = \lambda\alpha, \qquad \beta' = \lambda\beta,$$

λ étant différent de l'unité. Les homographies Ω_1, Ω_2 sont représentées par

$$x_1' : x_2' : x_3' : \rho x_4' = \rho_1 x_2 : \rho_1 x_2 : \rho_2 x_3 : \rho_2 x_3, \tag{Ω_1}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \rho x_1' &= \alpha x_1 - \beta x_2, \quad \rho x_2' = \beta x_1 + \alpha x_2, \\ \rho x_3' &= \alpha x_3 - \beta x_1, \quad \rho x_4' = \beta x_3 + \alpha x_4 \end{aligned} \right. \tag{Ω_2}$$

et l'on a $\qquad \rho_2 = \lambda\rho_1.$

On obtient les équations de Ω_1, Ω_2 dans le cas où les deux relations (1) sont satisfaites en suppossant $\alpha = 0$. On doit alors supposer λ différent de ± 1, pour que Ω_1 ne soit pas harmonique.

(1) Ce théorème pourrait se déduire des résultats de M. Servais (loc. cit., nº 35,36); la méthode utilisée ici est différente.