Mathesis, avril 1927.

SUR LES SURFACES CUBIQUES,

par M. Lucien Godeaux, Professeur à l'Université de Liége.

Nous nous proposons de montrer que, étant donnés une surface cubique F et un point P de cette surface, si l'on établit une projectivité entre les plans de l'espace et les quadriques osculant en P la surface F, celle-ci se transforme en une surface cubique F'. Nous établissons quelques propriétés du couple de surfaces F, F'. Le procédé de démonstration est basé sur la représentation plane de la surface cubique.

1. Soient, dans un plan ϖ, six points distincts $A_1, A_2, ..., A_6$ non situés sur une même conique et dont trois quelconques ne sont jamais en ligne droite. Les cubiques planes Γ_3 passant par ces six points sont en général irréductibles et forment un système linéaire ∞^3, $|\Gamma_3|$. En rapportant projectivement les courbes Γ_3 aux plans de l'espace, on obtient une surface cubique F, en correspondance birationnelle avec le plan ϖ. (1)

Les vingt-sept droites de la surface F sont toutes distinctes. Aux six points $A_1, A_2, ..., A_6$ correspondent six droites formant un sixain ; aux six coniques passant chacune par cinq des points A_1, $A_2, ..., A_6$ correspondent six droites formant le sixain complémentaire du premier. Les quinze autres droites de F correspondent aux droites joignant deux à deux les points $A_1, A_2, ..., A_6$. La surface F est dépourvue de points multiples, nous dirons que c'est une surface cubique générale.

2. Considérons un point P de F, n'appartenant à aucune droite de cette surface. Le point P_1 du plan ϖ qui correspond à P est distinct des points $A_1, A_2, ..., A_6$ et ne se trouve ni sur une droite passant par deux de ces points, ni sur une conique passant par cinq de ces points.

A la section de F par le plan tangent à cette surface en P correspond la courbe du système $|\Gamma_3|$ ayant un point double en P_1. Nous désignerons cette cubique par Δ. Entre le faisceau des tangentes à F en P et le faisceau des droites du plan ϖ passant par P_1, existe une homographie dans laquelle aux tangentes asymptotiques de F en P correspondent les tangentes à Δ en P_1. Si le point P est parabolique, la courbe Δ a donc un point de rebroussement en P_1 ; si au contraire Δ a un point double ordinaire en P_1, le point P n'est pas parabolique.

Considérons les quadriques Q osculatrices à la surface F en P. Elles découpent, sur F, des courbes C_6 du sixième ordre, ayant un point triple en P. A ces courbes correspondent, dans le plan ϖ, des courbes du sixième ordre Γ_6 passant doublement par chacun des points $A_1, A_2, ..., A_6$ et ayant un point triple en P_1. Les courbes Γ_6

(1) Au sujet de la représentation plane de la surface cubique, voir par exemple, ENRIQUES-CHISINI, *Courbes et fonctions algébriques d'une variable* (traduit par M. LÉGAUT). Paris, Gauthier-Villars, 1926 (voir p. 553 et suivantes).

sont, comme les quadriques Q, en nombre ∞^3 et forment un système linéaire $|\Gamma_6|$. Les quadriques Q forment également un système linéaire $|Q|$ et entre les systèmes linéaires $|\Gamma_6|$, $|Q|$, existe une projectivité.

Soit t une tangente asymptotique de la surface F en P. Toute courbe de l'espace ayant un contact du second ordre avec la surface F en P, a également un contact du second ordre avec chacune des quadriques Q en ce point. Par suite, les quadriques Q contiennent la droite t.

Si γ est une conique osculant F en P, les quadriques Q rencontrent cette conique en un seul point variable en dehors de P, par suite γ appartient à ∞^1 quadriques Q formant un faisceau.

Supposons le point P non parabolique et soient t_1, t_2 les tangentes asymptotiques de F en ce point. Deux quadriques Q_1, Q_2 du système $|Q|$ ont en commun une courbe du quatrième ordre ayant un point triple en P et formée des droites t_1, t_2 et d'une conique γ osculant F et chacune des quadriques Q en P. Une troisième quadrique Q_3 du système $|Q|$, n'appartenant pas au faisceau déterminé par Q_1, Q_2, rencontre γ en un seul point (variable avec Q_3) en dehors de P. Les quadriques $|Q|$ forment donc un système linéaire homaloïdal $|Q|$, c'est-à-dire un système tel que trois de ses quadriques, n'appartenant pas à un même faisceau, ont en commun un seul point variable (en dehors de t_1, t_2).

Supposons maintenant le point P parabolique, les tangentes asymptotiques étant confondues en une seule droite t. Une quadrique Q rencontre le plan tangent à F en P suivant la droite t et une seconde droite t' passant par P. La droite t' ayant avec Q, en P, un contact d'ordre supérieur au second, doit avoir un contact du second ordre avec F en P ; par suite t' doit se confondre avec t. Il en résulte que les quadriques du système $|Q|$ sont tangentes à un plan fixe le long de t et sont donc des cônes. Une conique γ ayant un contact du second ordre avec F en P, appartenant à ∞^1 quadriques Q, les cônes formant actuellement le système $|Q|$ sont obtenus en projetant des différents points de t les coniques γ. Il en résulte que deux cônes ont en commun, outre t, une conique ayant un contact du second ordre avec F en P (conique éventuellement dégénérée en t et en une droite s'appuyant sur t). En raisonnant comme dans le cas précédent, on trouve encore que les cônes Q forment un système homaloïdal $|Q|$.

Pour plus de clarté, désignons par Σ l'espace contenant F. En rapportant projectivement les quadriques du système $|Q|$ aux plans d'un second espace Σ', nous définissons une correspondance birationnelle Ω dans laquelle un point de Σ' est l'homologue du point commun (en dehors du plan tangent à F en P) aux quadriques de $|Q|$ correspondant aux plans de Σ' passant par le point considéré. A la surface F, Ω fait correspondre une surface F' de Σ'. Nous allons démontrer que F' est une surface cubique générale.

3. Les surfaces F' et F, la surface F et le plan ϖ sont liés par des correspondances birationnelles, donc il existe une correspondance birationnelle entre F' et ϖ. Entre les sections planes de F' et les sections C_6 de F par les quadriques Q, existe une projectivité ; entre les courbes C_6 de F et les courbes Γ_6 de ϖ, existe également une projectivité ; par suite, les sections planes de F' et les courbes de $|\Gamma_6|$ se correspondent dans une projectivité. Le système $|\Gamma_6|$ donne, en d'autres termes, une représentation de F' sur le plan ϖ.

Considérons, dans le plan ϖ, les quartiques Δ_4 ayant un point triple en P_1 et passant simplement par $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Ces courbes forment un réseau homaloïdal, c'est-à-dire un réseau dont deux courbes quelconques se rencontrent en un seul point en dehors des points-base. Rapportons projectivement les courbes Δ_4 aux droites d'un plan ϖ' ; nous obtenons, entre ϖ et ϖ', une correspondance birationnelle de Jonquières (1) ω. La jacobienne du réseau $|\Delta_4|$ est formée de six droites $P_1A_1, P_1A_2, \ldots, P_1A_6$ et de la cubique Δ. Aux points de ces six droites correspondent, dans ϖ' des points isolés respectivement $A'_1, A'_2, \ldots, A'_6$, et aux points de Δ, correspond un point P'_1, distinct de $A'_1, A'_2, \ldots, A'_6$.

Aux droites de ϖ correspondent des quartiques Δ'_4 de ϖ', ayant un point triple en P'_1 et passant simplement par $A'_1, A'_2, \ldots, A'_6$. La jacobienne du réseau homaloïdal $|\Delta'_4|$ formé par les courbes Δ'_4 se compose des six droites $P'_1A'_1, P'_1A'_2, \ldots, P'_1A'_6$ et d'une cubique Δ' ayant un point double en P'_1 et passant simplement par $A'_1, A'_2, \ldots, A'_6$. Aux points des droites $P'_1A'_1, P'_1A'_2, \ldots, P'_1A'_6$ correspondent respectivement les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ et à ceux de Δ', le point P_1.

(1) Au sujet de ces transformations, voir par exemple, L. Godeaux, *Les transformations birationnelles du plan*. Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. XXII. Paris, Gauthier-Villars, 1927.

Aux courbes Γ_6 de ϖ, ω fait correspondre dans ϖ' des cubiques Γ'_3 passant simplement par A'_1, A'_2, ..., A'_6, mais ne passant pas par P'_1. Les courbes Γ'_3 forment un système linéaire $| \Gamma'_3 |$ qui, d'après les constructions précédentes, est lié par une projectivité au système des sections planes de F'.

Supposons que les points A'_1, A'_2, ..., A'_6 puissent se trouver sur une même conique Γ'_2. A cette conique correspond, dans ϖ, une courbe du huitième ordre formée des six droites P_1A_1, P_1A_2, ..., P_1A_6 et d'une conique passant par les six points A_1, A_2, ..., A_6, contrairement à l'hypothèse.

Supposons que trois des points A'_1, A'_2, ..., A'_6, par exemple les trois premiers, puissent se trouver en ligne droite. A cette droite correspond dans ϖ une courbe Δ_4 formée des droites P_1A_1, P_1A_2, P_1A_3 et d'une droite passant par A_4, A_5, A_6. Une telle droite ne peut exister par hypothèse.

Il résulte de ce qui précède que la surface F' est, comme F, une surface cubique générale.

4. Soit P' le point F' qui correspond au point P'_1 de ϖ'. Le point P' ne peut se trouver sur une droite de F', car alors, P'_1 se trouverait soit sur une conique passant par cinq des points A'_1, A'_2, ..., A'_6, soit sur une droite passant par deux de ces points. Mais dans ces conditions, les courbes Δ'_4 seraient dégénérées, contrairement à la théorie des transformations de Jonquières.

Les quadriques osculatrices à F' en P' découpent sur F' des courbes C'_6 d'ordre six ayant un point triple en P'. A ces courbes correspondent, sur ϖ', des courbes Γ'_6 d'ordre six ayant un point triple en P'_1 et des points doubles en A'_1, A'_2, ..., A'_6. D'autre part, ces courbes Γ'_6 correspondent également aux courbes Γ_3 de ϖ. Par suite, aux plans de Σ, Ω fait correspondre, dans Σ', les quadriques Q' osculatrices de F' en P'. De plus, le système des plans de Σ et le système linéaire ∞^3, $| Q' |$, formé par les quadriques Q', sont liés par une projectivité.

Observons qu'aux droites de ϖ passant par P_1, correspondent dans ϖ', par ω, les droites passant par P'_1. De plus, à une tangente à Δ en P_1, correspond une tangente à Δ' en P'_1. Par suite, si Δ a un point de rebroussement en P_1, Δ' a également un point de rebroussement en P'_1, et réciproquement. Il en résulte que si P est un point parabolique de F, P' est un point parabolique de F', et réciproquement.

5. Nous allons examiner les cas où le point P appartient à une ou à deux droites de F. Commençons par observer que l'on peut supposer que les droites auxquelles appartient le point P ont pour images, sur ϖ, des droites passant par deux des points A_1, A_2, ..., A_6. Supposons en effet, pour fixer les idées, que P appartienne aux droites de F ayant pour images, sur ϖ, l'une le point A_1 et l'autre la conique γ_2 passant par A_1, A_2, ..., A_5. Opérons une transformation quadratique en rapportant projectivement les coniques passant par A_1, A_2, A_3 aux droites de ϖ. Aux droites A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 correspondent respectivement des points A''_1, A''_2, A''_3 et aux points A_4, A_5, A_6, des points A''_4, A''_5, A''_6. Aux cubiques Γ_3 correspondent des cubiques Γ''_3 passant par A''_1, A''_2, ..., A''_6. On obtient ainsi une nouvelle représentation plane de F, analogue à la première, mais dans laquelle au point P correspond le point commun aux droites $A''_2A''_3$ et $A''_4A''_5$,

Supposons en premier lieu que le point P_1 appartienne à la droite A_5A_6, le point correspondant P de F appartenant à une seule droite de F. Une des tangentes asymptotiques de F en P coïncide avec cette droite et celle-ci appartient à toutes les quadriques Q osculant F en P. Voyons quelles sont les modifications que doivent subir les raisonnements faits plus haut.

La cubique Δ est formée de la droite $a = A_5A_6$ et de la conique δ passant par A_1, A_2, A_3, A_4 et P_1. Si P est un point parabolique de F, cette droite et cette conique se touchent en P_1. Les courbes Γ_6 sont dégénérées en la droite a et les courbes Γ_5, du cinquième ordre, ayant un point double en chacun des points P_1, A_1, A_2, A_3, A_4 et des points simples en A_5, A_6.

Considérons les cubiques Δ_3 ayant un point double en P_1 et passant par A_1, A_2, A_3, A_4. Elles forment un réseau homaloïdal $|\Delta_3|$ et en rapportant projectivement ces courbes aux droites d'un plan ϖ', on obtient une transformation birationnelle de Jonquières entre ϖ et ϖ'. Aux droites P_1A_1, ..., P_1A_4 correspondent des points distincts A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 et à la conique δ, un point P'_1. Aux points A_5, A_6 et à la droite a correspondent des points A'_5, A'_6 et une droite $a' = A'_5A'_6$ passant par P'_1. Aux courbes Γ_5 correspondent des cubiques Γ'_3 passant simplement par $A'_1, A'_2, \ldots, A'_6$, mais ne passant pas par P'_1. Il est maintenant aisé d'achever le raisonnement et on voit que le point P' qui correspond à P'_1 sur la surface F', appartient à une et une seule droite de cette surface. De plus, si l'on observe qu'aux points de la conique δ' de ϖ', passant par $A'_1, \ldots, A'_4, P'_1$, correspond le point P_1, et que si a est tangente en P_1 à δ, a' est tangente à δ' en P'_1, on voit que si P est un point parabolique de F, P' est aussi un point parabolique de F', et réciproquement.

Supposons maintenant que P_1 soit l'intersection des droites $a_1 = A_3A_5$, $a_2 = A_5A_6$. Le point P appartient à deux droites tracées sur F. La cubique Δ est actuellement formée de trois droites a_1, a_2 et A_1A_2. Les courbes Γ_6 sont formées des droites a_1, a_2 et de quartiques Γ_4 passant doublement par A_1, A_2, simplement par $A_3, \ldots, A_6$, P_1. Si l'on rapporte projectivement les coniques Δ_2 passant par A_1, A_2, P_1 aux droites du plan ϖ', le système linéaire $| \Gamma_4 |$ se transforme en un système linéaire $| \Gamma'_3 |$ formé de cubiques passant par six points. Ce système donne la représentation plane de la surface F'. Aux droites a_1, a_2 correspondent, dans ϖ', des droites a'_1, a'_2 passant chacune par deux points-base distincts de $| \Gamma'_3 |$. Le point P' de F', homologue de $P'_1 = a'_1a'_2$, appartient à deux droites de F'. Les raisonnements faits plus haut peuvent être repris.

En résumé : *Étant donnée une surface cubique générale* F, *si l'on rapporte projectivement aux plans de l'espace les quadriques osculant* F *en un point* P, *on obtient une nouvelle surface cubique générale* F', *transformée birationnelle de* F. *Aux sections planes de* F *correspondent les sections de* F' *par les quadriques osculant cette surface en un point* P'. *Si le point* P *est parabolique ou s'il appartient à une ou à deux droites de* F, *le point* P' *possède la même propriété vis-à-vis de* F', *et réciproquement.*

6. Les surfaces cubiques ayant, en P, un contact du second ordre avec F, sont en nombre ∞^{13} et forment un système linéaire que nous désignerons par $| F |$. Une surface de ce système est, en général, dépourvue de points multiples. Par suite, la transformation Ω fait correspondre, au système $| F |$, le système $| F' |$ formé par les surfaces cubiques ayant un contact du second ordre avec la surface F' au point P'.

Ce résultat peut s'établir analytiquement de la manière suivante:

L'équation d'une surface cubique tangente en O au plan $z = 0$ s'écrit sous la forme

$$z + \varphi_2 + z\varphi_1 + \varphi_3 = 0 \tag{1}$$

où l'on a posé

$$\varphi_2 \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

et où φ_1 et φ_3 sont des polynomes entiers et homogènes en x, y, z, respectivement de degrés un et trois.

Les quadriques osculatrices à la surface (1) en O ont pour équation

$$\lambda_1 xz + \lambda_2 yz + \lambda_3 z^2 + \lambda_4 (z + \varphi_2) = 0.$$

Les équations de la transformation Ω peuvent par suite s'écrire

$$x = \frac{xz}{z + \varphi_2}, \qquad y = \frac{yz}{z + \varphi_2}, \qquad z = \frac{z^2}{z + \varphi_2}.$$

Celles de Ω^{-1} sont donc

$$x' = \frac{x'z'}{z' - \varphi'_2}, \qquad y' = \frac{y'z'}{z' - \varphi'_2}, \qquad z' = \frac{z'^2}{z' - \varphi'_2},$$

en désignant par φ'_2 ce que devient φ_2 lorsque l'on y remplace x et y par x' et y'.

En employant des notations analogues pour φ_1, φ_3, on voit que Ω fait correspondre à la surface (1), la surface cubique

$$z' - \varphi'_2 + z'\varphi'_1 + \varphi'_3 - \varphi'_1\varphi'_2 = 0,$$

ce qui démontre le point à établir.

Observons que les raisonnements faits plus haut pourraient s'étendre aux cas où la surface cubique F possède des points doubles, à condition de choisir pour le point P un point simple de la surface. On obtiendrait, comme transformée de F par Ω, une surface cubique F′ possédant en général les mêmes singularités que F, sauf toutefois lorsque le plan tangent à F en P contiendrait des points doubles de F.

7. Nous terminerons par quelques indications sur la transformation birationnelle Ω.

Considérons un point O et une conique Γ dont le plan ϖ ne passe pas par O. Les quadriques passant par O et par Γ forment un système homaloïdal ; trois de ces quadriques, n'appartenant pas à un même faisceau, ont en effet un seul point en dehors de O et de Γ. En rapportant projectivement ces quadriques aux plans de l'espace, on obtient une transformation birationnelle considérée par CREMONA (1). Le cas où la conique Γ dégénère en deux droites a également été considéré par CREMONA ; il est particulièrement utilisé dans l'étude des points singuliers des surfaces algébriques (2). CREMONA considère encore le cas où O appartient à la conique Γ ; les quadriques considérées passent dans ce cas par Γ et ont un plan tangent fixe en O. Enfin, si la conique Γ est de plus dégénérée en deux droites passant par O, on obtient la transformation Ω considérée plus haut, et signalée d'ailleurs par CREMONA (3).

---

(1) Rend. Istit. Lombardo, 1871 ; Annali di Matematica, 1871 ; *Opere Matematiche*, tome III. Milan, Hoepli, 1917.

(2) Particulièrement dans les travaux de C. SEGRE, B. LEVI et O. CHISINI. Voir à ce sujet les *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* de ENRIQUES et CHISINI, vol. II. Bologne, Zanichelli, 1918 (livre IV, chap. IV, p. 551 et suiv.).

(3) Il semble que la transformation Ω puisse être d'un certain intérêt dans l'étude des quadriques de DARBOUX et de la quadrique de LIE en un point d'une surface.