NOTES MATHÉMATIQUES.

11. *Sur une inversion triangulaire.* 1. Soient A′, B′, C′ et A″, B″, C″ les points où les droites joignant les sommets du triangle fondamental ABC à deux points quelconques P, Q coupent les côtés opposés du triangle.

1° Les cordes ne passant pas par A, communes aux coniques γ_1 tangentes à AQ en A et à BC en A′, et aux coniques γ_2 circonscrites au triangle ABC et tangentes à AQ en A, concourent en un point fixe A‴ de la droite BC.

En effet, soit γ'_1 une des coniques γ_1. Les coniques γ_2 forment un faisceau et coupent γ'_1, en dehors de A, suivant des couples de points en involution. Les droites déterminées par ces couples de points passent donc par un point fixe A‴ et ce point est situé sur la droite BC puisque la conique dégénérée (AQ, BC) est une des coniques γ_2.

De même, si γ'_2 est une des coniques γ_2, les coniques γ_1 formant un faisceau, coupent γ'_2, en dehors de A, suivant des couples de points en involution. Les droites déterminées par ces couples de points passent donc par un point fixe. Ce point est situé sur BC, car la conique dégénérée (AQ, BC) est une des coniques γ_1 ; dès lors, comme il appartient à la corde commune aux coniques γ'_1, γ'_2 et ne passant pas par A, il coïncide avec A‴.

2° Si x, y, z sont les coordonnées courantes, α, β, γ et α', β', γ' les coordonnées des points P, Q, λ et μ des paramètres arbitraires, les équations des coniques γ_1, γ_2 sont respectivement

$$(\gamma' y - \beta' z)\, x + \lambda\, (\gamma y - \beta x)^2 = 0,$$

$$(\gamma' y - \beta' z)\, x + \mu y z = 0.$$

En désignant par $Ax + By + Cz = 0$ l'équation d'une corde, ne passant pas par A, commune aux coniques γ_1, γ_2, il doit exister une valeur de k pour laquelle l'équation

$$(1 + k)(\gamma' y - \beta' z)\, x + \lambda\, (\gamma y - \beta x)^2 + k \mu y z = 0$$

prend la forme

$$(\gamma' y - \beta' z)(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z) = 0.$$

Il en résulte que l'équation de la corde considérée est

$$[\mu\beta'\gamma' - \lambda(\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2]\, x + \lambda\mu\,[\gamma^2\beta' y - \beta^2\gamma' z] = 0$$

et qu'ainsi cette corde passe par le point fixe A''' $(0, \beta^2 : \beta', \gamma^2 : \gamma')$.

En permutant circulairement les éléments du triangle ABC, on trouve de même deux points fixe B''' $(\alpha^2 : \alpha', 0, \gamma^2 : \gamma')$, C''' $(\alpha^2 : \alpha', \beta^2 : \beta', 0)$ sur les droites CA, AB et on en déduit que les droites AA''', BB''', CC''' *se coupent en un point* R *de coordonnées* $(\alpha^2 : \alpha', \beta^2 : \beta', \gamma^2 : \gamma')$, *qui reste le même si, conservant le point* Q, *on remplace le point* P *par l'un des points algébriquement associés* P_a $(-\alpha, \beta, \gamma)$, P_b $(\alpha, -\beta, \gamma)$, P_c $(\alpha, \beta, -\gamma)$.

3° Les points Q, R se correspondent dans l'inversion triangulaire dont le triangle ABC est le triangle de référence et dont les points P, P_a, P_b, P_c sont les points doubles. *Ils sont donc les intersections complémentaires de deux cubiques d'un réseau ayant pour points fondamentaux les sommets du triangle* ABC *et les points* P, P_a, P_b, P_c.

4° Si l'on permute les rôles des points P, Q dans la définition du point R, on trouve un quatrième point S $(\alpha'^2 : \alpha, \beta'^2 : \beta, \gamma'^2 : \gamma)$ et on constate que *les produits des coordonnées des points* R, S *sont égaux à ceux des coordonnées des points* P, Q.

5° En opérant à l'aide des points R, S comme on a fait avec les points P, Q et ainsi de suite, de proche en proche, on trouve les formules générales

$$\alpha^k : \alpha'^{k-1}, \qquad \beta^k : \beta'^{k-1}, \qquad \gamma^k : \gamma'^{k-1}, \tag{1}$$

$$\alpha'^k : \alpha^{k-1}, \qquad \beta'^k : \beta^{k-1}, \qquad \gamma'^k : \gamma^{k-1}, \tag{2}$$

où $k = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1)$ et dans lesquelles il suffit de donner à n les valeurs successives 1, 2, ... pour avoir les coordonnées des points P et Q, R et S, ... (L. Godeaux)

2. 1° E. Lemoine (AF, 1891 et 1892) avait déjà étudié la correspondance entre les couples de points (P, Q), (R, S), ... et obtenu

les formules (1) et (2). Il déduisait le moyen, connaissant le triangle ABC et les points P, Q, de construire les points R, S avec la règle seule, de la propriété suivante : *Si* D, E *sont les points où la droite* AP *coupe les droites* BQ, CQ *et si* F *est le point d'intersection des droites* CD, BE, *la droite* AF *passe par le point* R.

La démonstration analytique de cette propriété ne présente aucune difficulté, mais on peut déduire une démonstration géométrique des propriétés des involutions associées aux sommets d'un triangle Si P, P_a, P_b, P_c sont quatre points algébriquement associés par rapport au triangle ABC, on dit que les faisceaux involutifs dont les rayons doub es sont les droites APP_a et AP_bP_c, BPP_b et BP_cP_a, CPP_c et CP_aP_b sont associés aux sommets du triangle ABC. Lorsque trois droites issues des sommets du triangle sont concourantes, il en est de même des droites conjuguées dans les trois faisceaux involutifs et les points de concours sont des points inverses dans l'inversion triangulaire dont les points P, P_a, P_b, P_c sont les points doubles. Dès lors, la propriété de Lemoine résulte de ce que, en vertu du théorème de Desargues, AP est un rayon double du faisceau involutif dont AB et AC, AQ et AF sont deux couples de rayons conjugués ; et on voit en outre que les points Q et R sont des points inverses dans l'inversion triangulaire que l'on vient de définir.

2° Il résulte du théorème établi par M. Godeaux (1, 1°) que la tangente à la conique γ_2 au second point d'intersection A_0 avec la droite AA′ passe par le point A‴ ; en effet, la conique dégénérée (AA′, AA′) étant une des coniques γ_1, A_0 est un des points doubles de l'involution déterminée sur la conique γ'_2 par les coniques γ_1. Mais on peut le démontrer directement. Soient A_1, A_3 les points d'intersection des tangentes en B et C ou en A et A_0 à la conique γ'_2 ; A_3 et A‴ les points d'intersection des droites A_1A_2 et A_0A_2 avec BC. La droite A_1A_2 est la polaire du point A′ pour γ'_2 et le faisceau A_2 (A, A_0, A′, A_1) est harmonique ; les points A_2, A′ sont donc les points doubles d'une involution dont B et C. A″ et A‴ sont deux couples de points conjugués. Il suffit de projeter des points A, B, C cette involution et les involutions analogues définies sur CA et AB, pour retrouver les faisceaux involutifs associés considérés dans le paragraphe précédent.

3° Le point A‴ étant conjugué du point A″ dans l'involution (A′, A′ ; A_2, A_2), est indépendant de la conique γ'_2. Donc, *les tangentes en* P *aux coniques du faisceau* ABCP *qui sont tangentes aux*

droites AQ, BQ, CQ, *rencontrent les côtés du triangle* ABC *en trois points* A''', B''', C''' *tels que les droites* AA''', BB''', CC''' *se coupent au point* R, *inverse du point* Q *dans l'inversion triangulaire dont* ABC *et* P *sont le triangle de référence et un point double.*

Il résulte du théorème de PASCAL que les droites PA''', PB''', PC''' joignent le point P aux points où les côtés du triangle pédal de ce point pour le triangle ABC coupent les droites AQ, BQ, CQ ; ce qui fournit une nouvelle construction du point R en n'employant que la règle. (AD. M.)
