SUR UNE TRANSFORMATION QUADRATIQUE INVOLUTIVE,

par M. L. Godeaux, Professeur à l'Université de Liége.

Une transformation quadratique involutive ordinaire possède quatre points unis (ou points invariants) et fait correspondre aux droites du plan les coniques passant par les points diagonaux du quadrangle complet dont les sommets sont les quatre points unis. Si deux des points diagonaux sont les points cycliques du plan, la transformation quadratique devient une inversion. Nous avons montré que l'on peut faire correspondre aux couples de points homologues de la transformation, les points d'une surface cubique possédant quatre points doubles coniques (1). Nous nous proposons de considérer dans cette note une transformation quadratique involutive n'ayant qu'un nombre fini de points unis et faisant correspondre aux droites du plan des coniques passant par deux points et ayant même tangente en un de ces points. Nous construirons une surface cubique représentant les couples de points homologues de cette transformation.

1. Considérons la transformation quadratique T représentée, en coordonnées projectives, par les équations

$$x_1' : x_2' : x_3' = ax_1x_2 : ax_1^2 : x_2(bx_1 - ax_3), \qquad \text{(T)}$$

a et b étant des constantes non nulles.

Aux droites du plan, T fait correspondre les coniques

$$\lambda_1 ax_1x_2 + \lambda_2 ax_1^2 + \lambda_3 x_2(bx_1 - ax_3) = 0,$$

passant par les points $O_2(0,1,0)$, $O_3(0,0,1)$ et ayant la droite $x_2 = 0$ comme tangente fixe en ce dernier point.

Les points unis de la transformation T satisfont aux équations

$$\left\Vert \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ ax_1x_2 & ax_1^2 & x_2(bx_1 - ax_3) \end{matrix} \right\Vert = 0. \qquad (1)$$

---

(1) L. Godeaux, *Sur l'inversion et sur une surface cubique à quatre points doubles* (Mathesis, 1922, pp. 19-23). La représentation en question a été utilisée par M. A. Emch. *On plane algebraic curves which remain invariant....* (The Tôhoku Math. Journal, 1924, XXIV, pp. 68-87).

Les points dont les coordonnées satisfont aux équations (1) appartiennent à toutes les cubiques du réseau

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ ax_1x_2 & ax_1^2 & x_2(bx_1 - ax_3) \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Ces cubiques ont en O_3 un point double à tangentes

$$\lambda_1 (x_1^2 + x_2^2) - 2\lambda_2 x_1 x_2 = 0,$$

variables avec la courbe. Elles passent par les points $A_1 (2a, 2a, b)$, $A_2 (2a, -2a, b)$ et par O_2. Les points A_1, A_2 sont des points unis de T, puisque leurs coordonnées rendent identiques les formules définissant cette transformation.

La transformation T échange entre elles les droites passant par O_2 et en laisse deux invariantes ; ce sont les droites

$$x_1 = 0, \qquad bx_1 - 2ax_3 = 0.$$

La seconde de ces droites contient A_1, A_2. Comme tous les points de la droite A_1A_2 ne vérifient pas les équations (1), la transformation T détermine une involution sur cette droite, involution dont les points unis sont A_1, A_2. Il en résulte que le point O_2 n'est pas un point uni de T. Observons d'ailleurs que si, dans les équations (T), nous faisons $x_2 = 0$, nous obtenons $x'_1 = x'_3 = 0$. Le point O_2 correspond donc aux points de la droite $x_2 = 0$ (comme cela résulte d'ailleurs de la théorie des transformations quadratiques). D'une manière plus précise, aux droites passant par le point $(\alpha_1, 0, \alpha_3)$, T fait correspondre des coniques tangentes en O_2 à la droite

$$(a\alpha_3 - b\alpha_1)\, x_1 + \alpha_1 a x_3 = 0. \qquad (3)$$

En particulier, aux droites passant par le point $(2a, 0, b)$, intersection des droites A_1A_2 et $x_2 = 0$, T fait correspondre des coniques tangentes à la droite A_1A_2 en O_2. Nous traduirons ces propriétés en disant, suivant la notation de NOETHER [1], qu'au point $(\alpha_1, 0, \alpha_3)$ de $x_2 = 0$ correspond le point infiniment voisin de O_2

---

[1] Voir à ce sujet les ouvrages : ENRIQUES-CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, (Bologna, 3 vol., 1915, 1918, 1924); SEVERI, *Lezioni di geometria algebrica*, Padova, 1908); *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, (Leipzig, 1921).

dans la direction (3). En particulier, le point infiniment voisin de O_2 dans la direction A_1A_2 et le point d'intersection de cette droite avec $x_2 = 0$, sont homologues dans la transformation T.

Considérons maintenant le point O_3. La transformation T échange entre elles les droites passant par O_3 et en laisse deux,

$$x_1 - x_2 = 0, \qquad x_1 + x_2 = 0,$$

invariantes. La première passe par A_1, la seconde par A_2. La transformation T détermine, sur chacune de ces droites, une involution représentée par

$$x'_1 : x'_3 = ax_1 : bx_1 - ax_3.$$

On voit que l'involution déterminée sur la droite O_3A_1 possède comme points unis A_1 et O_3 ; l'involution déterminée sur O_3A_2 possède les points unis A_2 et O_3. O_3 est donc un point uni de la transformation T.

2. Considérons le point $(0, \alpha_2, \alpha_3)$ de la droite O_2O_3. Aux droites passant par ce point, T fait correspondre les coniques du faisceau

$$\alpha_3 a x_1^2 - \alpha_2 x_2 (bx_1 - ax_3) + \lambda a x_1 x_2 = 0. \tag{4}$$

Ces coniques sont osculatrices en O_3 à la conique

$$\alpha_2 x_2 x_3 + \alpha_3 x_1^2 = 0, \tag{5}$$

qui ne dépend que du point choisi. En effet, si nous passons aux coordonnées cartésiennes ordinaires en posant

$$x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1,$$

les équations (4) et (5) deviennent

$$\alpha_3 a x^2 - \alpha_2 y (bx - a) + \lambda a x y = 0, \qquad \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 = 0,$$

et donnent toutes deux, pour $x = 0$,

$$y_0 = 0, \qquad y'_0 = 0, \qquad y''_0 = -2\frac{\alpha_3}{\alpha_2}.$$

La manière dont se comporte le point O_3 vis-à-vis de la transformation T sera complètement déterminée lorsque nous aurons examiné quels sont les homologues des points infiniment voisins de O_3. Considérons une droite

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0 \tag{6}$$

passant par O_3 et une courbe d'ordre n,

$$x_3^{n-1}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \cdots = 0 \tag{7}$$

tangente à cette droite en O_3 (les termes non écrits ne contiennent x_3 qu'à la puissance $n - 2$ au plus). A la droite (6) et à la courbe (7), T fait correspondre la droite

$$\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1 = 0 \tag{8}$$

et la courbe

$$a x_1 x_2^{n-1}(b x_1 - a x_3)^{n-1}(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1) + \cdots = 0,$$

tangente en O_3 à la droite (8). Il en résulte que T échange entre eux les points infiniment voisins de O_3. En particulier, T laisse invariants les points infiniment voisins de O_3 dans les directions O_3A_1, O_3A_2. Le point que T fait correspondre au point de $x_2 = 0$, infiniment voisin de O_3, est indéterminé sur la droite $x_1 = 0$.

3. Les courbes

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_2 x_3 (b x_1 - a x_3) + \lambda_2 [x_1^2 (b x_1 - a x_3) + a x_2^2 x_3] \\ + \lambda_3 a x_1 (x_1^2 + x_2^2) + \lambda_4 a x_1^2 x_2 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

sont transformées en elles-mêmes par T, quelles que soient les valeurs de λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Ces cubiques passent par les points O_2, O_3 et ont pour tangente en ce dernier point la droite $x_2 = 0$. Deux de ces cubiques se rencontrent encore en six points formant trois couples d'éléments homologues de la transformation T.

Rapportons projectivement les courbes du système linéaire ∞^3 formé par les courbes (9) aux plans de l'espace, en posant, par exemple,

$$\begin{aligned} X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_2 x_3 (b x_1 - a x_3) : x_1^2 (b x_1 - a x_3) \\ + a x_2^2 x_3 : a x_1 (x_1^2 + x_2^2) : a x_1^2 x_2. \end{aligned} \tag{10}$$

En éliminant x_1, x_2, x_3 entre ces équations, on obtient la relation

$$a^2 X_1 (X_3^2 - 4X_4^2) + a^2 X_2^2 X_4 - ab X_2 X_3 X_4 + b^2 X_4^3 = 0. \tag{11}$$

Les formules (10) établissent une correspondance birationnelle entre les points de la surface cubique F, représentée par l'équation (11), et les couples de points homologues dans la transformation T.

4. Aux couples de points homologues dans T formés d'un point de la droite $x_2 = 0$ et d'un point infiniment voisin de O_2, correspondent sur F les points d'une courbe. Si nous introduisons l'hypothèse $x_2 = 0$ dans les formules (10), nous obtenons

$$X_1 = X_4 = 0, \qquad X_2 : X_3 = bx_1 - ax_3 : ax_1.$$

Aux couples de points considérés correspondent donc les points de la droite $X_1 = X_4 = 0$. Inversement, à un point $(0, X_2, X_3, 0)$ de cette droite correspond le couple de points comprenant le point

$$x_2 = 0, \qquad ax_1 X_2 - (ax_1 - ax_3) X_3 = 0.$$

Si nous posons maintenant $x_1 = 0$ dans les équations (10), elles donnent

$$X_3 = X_4 = 0, \qquad X_1 : X_2 = - x_3 : x_2.$$

Aux points de la droite $x_1 = 0$ correspondent donc les points de la droite $X_3 = X_4 = 0$ de la surface F. Inversement, à un point $(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0)$ de cette droite correspond le point $(0, \alpha_2, - \alpha_1)$ de la droite $x_1 = 0$ et son homologue dans T. On peut préciser cette correspondance en observant qu'à la section de F par un plan

$$\alpha_2 X_1 - \alpha_1 X_2 + \lambda X_4 = 0,$$

passant par le point $(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0)$ correspond une cubique

$$\alpha_2 x_2 x_3 (bx_1 - ax_3) - \alpha_1 [x_1^2 (bx_1 - ax_3) + x_2^2 x_3] + \lambda a x_1^2 x_2 = 0,$$

passant par le point $(0, \alpha_2, - \alpha_1)$ et osculatrice, en O_3, à la courbe

$$\alpha_2 x_2 x_3 - \alpha_1 x_1^2 = 0,$$

comme on le vérifie aisément.

5. Envisageons maintenant les points qui correspondent, sur F, aux points unis de la transformation T.

Au point A_1 $(2a, 2a, b)$ correspond sur F le point A'_1 $(b^2, 4ab, 8a^2, 4a^2)$. Les coordonnées de ce point A'_1 annulent les dérivées partielles premières du premier membre de l'équation (11), par suite A'_1 est double pour F. Le lieu des tangentes à F en A'_1 a pour équation

$$4a^2X_2^2 + b^2X_3^2 + 8b^2X_4^2 + 16a^2X_1X_3 - 32a^2X_1X_4$$
$$- 4abX_2X_3 - 4b^2X_3X_4 = 0.$$

Cette équation représente un cône irréductible, donc A'_1 est un point double conique de la surface F.

De même, le point A_2 a pour correspondant sur F le point A'_2 $(b^2, -4ab, -8a^2, 4a^2)$, qui est double conique pour la surface.

Aux droites O_3A_1, O_3A_2 correspondent sur F respectivement les droites

$$\frac{X_2}{b} = \frac{X_3}{2a} = \frac{X_4}{a}, \qquad \frac{X_2}{b} = \frac{X_3}{2a} = \frac{X_4}{-a}.$$

Par suite, au point O_3 correspond sur F le point commun à ces deux dernières droites, c'est-à-dire le point O'_1 $(1, 0, 0, 0)$. Ce point O'_1 est double biplanaire pour F, le cône des tangentes à F en ce point ayant pour équation

$$(X_3 - 2X_4)(X_3 + 2X_4) = 0.$$

On vérifiera sans difficulté que le plan tangent en un point quelconque de la droite $O'_1A'_1$ est le plan

$$X_3 - 2X_4 = 0,$$

et que le plan tangent en tout point de la droite $O'_1A'_2$ est

$$X_3 + 2X_4 = 0.$$

La droite $A'_1A'_2$ a pour équations

$$2aX_2 - bX_3 = 0, \qquad 4a^2X_1 - b^2X_4 = 0,$$

et le second de ces plans est tangent à la surface F en tout point de cette droite.

Enfin, le plan tangent en tout point de la droite $X_3 = X_4 = 0$ est le plan fixe $X_4 = 0$.

En résumé, *on peut faire correspondre birationnellement aux couples de points homologues de la transformation quadratique* T, *les points d'une surface cubique* F *possédant un point biplanaire* O'_1 *et deux points doubles coniques* A'_1, A'_2. *La surface* F *admet un même plan tangent aux points de chacune des droites* $A'_1A'_2$, $O'_1A'_1$, $O'_1A'_2$, *les deux derniers de ces plans tangents formant le lieu des tangentes à la surface* F *en* O'_1. *De plus, la surface* F *admet un même plan tangent en tout point de la droite commune aux plans tangents en* O'_1.

6. Outre le système de courbes (9), il existe un second système de cubiques planes transformées en elles-mêmes par T, c'est le système (2). Si l'on élimine x_1, x_2, x_3 entre les équations (2) et (10), on trouve, outre l'équation (11) de la surface F, l'équation

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 [(bX_3 - aX_2)^2 - 4a^2X_1X_4] + \lambda_2^2X_4(b^2X_4 - 4a^2X_1) + \lambda_3^2a^2(X_3^2 - 4X_4^2) \\ + 2\lambda_1\lambda_2(2a^2X_1X_3 + abX_2X_4 - b^2X_3X_4) + 2\lambda_1\lambda_3a(aX_2X_3 - bX_3^2 + 2bX_4^2) \\ + 2\lambda_2\lambda_3aX_4(bX_3 - 2aX_2) = 0. \qquad (12)\end{aligned}$$

Lorsque λ_1, λ_2, λ_3 varient, les surfaces (12) découpent, sur F, les courbes transformées des courbes (2). Les surfaces (12) passent par les points O'_1, A'_1, A'_2 et, de plus, comme on peut le vérifier aisément, ce sont des cônes en général irréductibles.

En éliminant X_1 entre les équations (11) et (12), on obtient l'équation

$$\begin{aligned}[\lambda_1 \{ b(X_3^2 - 2X_4^2) - aX_2X_3 \} + \lambda_2X_4(2aX_2 - bX_3) \\ - \lambda_3a(X_3^2 - 4X_4^2)]^2 = 0 \qquad (13)\end{aligned}$$

du cône projetant de O'_1 l'intersection de F et du cône (12). Il en résulte que la surface (12) est tangente à la surface F le long d'une cubique gauche [1], car le cône (13) passant par les droites $O'_1A'_1$, $O'_2A'_2$ et $X_3 = X_4 = 0$, rencontre donc ultérieurement F suivant une cubique gauche.

Il existe une famille ∞^2 *de cônes du second ordre inscrits à la surface* F *le long de cubiques gauches passant par les points* O'_1, A'_1, A'_2 ; *ces cubiques gauches correspondent aux cubiques planes invariantes pour* T *et passant par les points unis de* T.

---

(1) Cette propriété de contact des surfaces (12) et de F pourrait se déduire d'une propriété générale donnée dans notre *Mémoire sur les surfaces doubles*... (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914).