SUR LES FAISCEAUX DE COURBES PLANES DU SIXIÈME ORDRE DE HALPHEN,

par M. L. GODEAUX, professeur à l'École militaire.

HALPHEN a montré l'existence de faisceaux de courbes planes d'ordre $3m$ ayant neuf points multiples d'ordre m (1). Nous nous proposons de faire voir que, dans le cas $m = 2$, l'existence de faisceaux de courbes planes du sixième ordre ayant neuf points doubles, se déduit très simplement de la représentation plane de la surface cubique.

1. Soient, dans un plan ϖ, six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ non situés sur une même conique et tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas en ligne droite. Considérons les cubiques planes C_3 passant par ces six points. Ces cubiques forment un système linéaire ∞^3.

Établissons une projectivité entre les cubiques C_3 et les plans d'un espace ordinaire ; aux points du plan ϖ correspondent les points d'une surface cubique F, et cette correspondance entre les points de ϖ et ceux de F est birationnelle.

Aux points d'une section plane de F correspondent, dans le plan ϖ, les points d'une cubique C_3.

Aux points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ correspondent respectivement, sur la surface F, les points de six droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$ de cette surface.

Les sections de la surface F par les quadriques de l'espace sont des courbes du sixième ordre ; il leur correspond, dans le plan ϖ, des courbes d'ordre six, C_6, passant doublement par les six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$.

---

(1) HALPHEN. *Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles* (Bulletin de la Soc. Math. de France, 1881-82, t. X, p. 162 ; *Œuvres de* G.-H. HALPHEN, 1918, t. II. p. 547). Voir aussi ENRIQUES-CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, 1924, vol. III, p. 195. et p. 345.

La surface F est dépourvue de point singulier. Soit en effet, si c'est possible, P un point singulier de la surface F. Les sections de cette surface par des plans passant par P sont des courbes rationnelles. Il leur correspond, dans le plan ϖ, des cubiques C_3 formant un réseau et ces cubiques doivent être rationnelles. Trois cas peuvent se présenter :

1° Les cubiques C_3 du réseau ne sont pas dégénérées ;

2° Les cubiques C_3 du réseau se composent d'une droite fixe et des coniques d'un réseau ;

3° Les cubiques C_3 du réseau se composent d'une conique fixe et des droites du plan.

Plaçons-nous dans le premier cas, et soit P' le point du plan ϖ correspondant à P. Les cubiques C_3 passant par P' devraient toutes posséder un point double, ce qui est impossible, même si P' coïncidait avec un des points $A_1, A_2, \ldots, A_6$.

Dans le second cas, la droite fixe devrait contenir au moins trois des points $A_1, A_2, \ldots, A_6$, ce qui est impossible par hypothèse.

Dans le troisième cas, la conique fixe devrait contenir les six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$, ce qui est impossible par hypothèse.

2. Considérons un plan α non tangent à F. Il existe ∞^2 coniques tangentes en trois points à la cubique elliptique (F, α) section de la surface F par le plan α (1). Soient Γ_2 une de ces coniques, B'_1, B'_2, B'_3 ses points de contact avec la courbe (F, α). Nous supposerons cette conique choisie de manière qu'aucun des points de contact ne se trouve sur l'une des droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$.

Les plans tangents à la surface F aux points B'_1, B'_2, B'_3 se coupent en un point S. Considérons les quadriques tangentes, le long de Γ_2, au cône projetant cette conique du point S. Ces quadriques découpent, sur F, des courbes du sixième ordre Γ_6 ayant des points doubles en B'_1, B'_2, B'_3, et formant un faisceau.

(1) Clebsch-Lindemann. *Leçons sur la Géométrie* (trad. Benoist), t. II, p. 266.

Soient B_1, B_2, B_3 les points du plan ϖ qui correspondent à B'_1, B'_2, B'_3. Aux courbes Γ_6 correspondent, dans le plan ϖ, des courbes du sixième ordre C_6 passant doublement par les neuf points A_1, A_2, ..., A_6, B_1, B_2, B_3, et formant un faisceau. Ce faisceau est un faisceau de HALPHEN, dont l'existence est ainsi démontrée.

3. Sur la cubique (F, α), les tangentiels des points B'_1, B'_2, B'_3 sont en ligne droite (1). Soient respectivement D'_1, D'_2, D'_3 ces tangentiels. Si l'on choisit sur la courbe (F, α) les points B'_1, B'_2, par exemple, les points D'_1, D'_2 et par suite D'_3 sont déterminés. Le point B'_3 est l'un des quatre points de contact des tangentes à la cubique (F, α) passant par D'_3. On sait que l'un de ces points de contact est en ligne droite avec B'_1, B'_2 et ne peut par suite pas nous convenir. On en conclut que les points B'_1, B'_2 étant choisis, il existe trois positions possibles du point B'_3.

Il résulte de ce qui précède que pour construire un faisceau de HALPHEN, les points A_1, A_2, ... , A_6 étant donnés, nous devons choisir :

1° Une cubique C_3 dépourvue de point double, ce qui revient à choisir une section de la surface F par un plan non tangent à cette surface ;

2° Deux points B_1, B_2 appartenant à cette cubique et distincts des points A_1, A_2, ... , A_6.

Dans ces conditions, il existe, sur la cubique choisie, trois positions du point B_3 qui, avec A_1, A_2, ..., A_6, B_1, B_2, forme le groupe des neuf points doubles des sextiques d'un faisceau de HALPHEN.

4. Nous avons fait, au début, certaines hypothèses sur la position des points A_1, A_2, ... , A_6, de manière que la surface F soit dépourvue de points singuliers. Ces hypothèses peuvent être négligées (2). Ce qui est essentiel dans le raisonnement

(1) CLEBSCH-LINDEMANN, loc. cit.

(2) On supposera néanmoins que les courbes C_3 ne sont pas toutes dégénérées et que, par suite, quatre des points A_1, A_2, ... , A_6 ne sont jamais en ligne droite.

précédent (n° 2), c'est la possibilité de pouvoir choisir une section plane de la surface F dépourvue de point double. Or, cela peut toujours être fait si la surface F ne possède qu'un nombre fini de points singuliers, c'est-à-dire si les points A_1, A_2, ... , A_6 sont simples pour les courbes C_3.

Par exemple, si les points A_1, A_2, ..., A_6 sont les sommets d'un quadrilatère complet, la surface F possède quatre points doubles isolés et on peut toujours choisir un plan α non tangent à la surface et ne passant par aucun de ces points doubles.

Si les points A_1, A_2, ..., A_6 sont sur une même conique, la surface F possède un point double et on peut toujours choisir un plan α non tangent à F et ne passant pas par le point double de celle-ci.

6. Nous avons supposé (n° 2) la conique Γ_2 choisie de telle sorte qus les points B'_1, B'_2, B'_3 ne se trouvaient pas sur les droites a_1, a_2, ..., a_6. Il est facile de voir que si, par exemple, le point B'_1 se trouvait sur la droite a_1, le point B_1 serait infiniment voisin de A_1 et les courbes du faisceau de Halphen auraient deux points doubles infiniment voisins.