SUR LES FAISCEAUX DE CONIQUES,

PAR

Prof. L. GODEAUX.

(Liége).

Considérons un faisceau de coniques (Γ) tel que le lieu des pôles d'une droite par rapport aux coniques Γ soit une conique Δ. Les coniques Γ découpent sur cette droite les couples de points d'une involution. Celle-ci est l'involution des couples de points conjugués par rapport à la conique Δ. Ce théorème est bien connu; nous nous proposons d'en donner une démonstration ne faisant appel à aucune notion métrique dans les cas où le faisceau de coniques est déterminé par quatre points-base, réels ou imaginaires. De plus dans cette démonstration, tous les éléments utilisés peuvent être dessinés [1]).

1. Supposons que le faisceau (Γ) soit formé par les coniques passant par quatre points réels et distincts A, B, C, D. Soit s une droite ne passant par aucun de ces points. Désignons par A_1, B_1, C_1 les points de rencontre de s respectivement avec les droites BC, CA, AB et A_1' B_1' C_1' les intersections de s respectivement avec les droites AD, BD, CD. Les couples A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1' appartiennent à l'involution I découpée sur s par les coniques du faisceau (Γ).

La polaire a_1 de A_1 par rapport à une conique Γ du faisceau passe par le conjugué harmonique A' de A_1 par rapport à B, C. De même la polaire b_1 de B_1 par rapport à cette conique Γ passe par le conjugué harmonique B' de B_1 par rapport à C, A.

---

[1]) Nous ne nous appuyons que sur des théorèmes établis d'après les mêmes principes. On pourra les trouver dans les ouvrages: F. ENRIQUES, *Lezioni di Geometria proiettiva* (Bologne, 1909); F. SEVERI, *Geometria proiettiva* (Florence, 1926); L. GODEAUX, *Cours de Géométrie projective* (Liége, Autographie Pholien, 1927).

Lorsque la conique Γ décrit le faisceau, les droites a_1, b_1 engendrent deux faisceaux projectifs.

Considérons en effet deux coniques déterminées Γ, Γ' de (Γ) et soient K, K' les seconds points de rencontre de Γ, Γ' avec AA_1, H et H' les points de rencontre de AA_1 avec les polaires a_1, a_1' de A_1 par rapport à Γ, Γ'. Les quaternes (AKA_1H) et $(AK'A_1H')$ étant harmoniques, on a

$$AKA_1H \barwedge AK'A_1H'.$$

Cette projectivité ayant pour points doubles A, A_1, on a

$$AA_1KK' \barwedge AA_1HH'.$$

De même, si l'on désigne par K_1, K_1' les seconds points de rencontre de Γ, Γ' avec la droite BB_1 par H_1, H_1' les points de rencontre de BB_1 avec les polaires du point B_1 par rapport aux coniques Γ, Γ', on a

$$BB_1K_1K_1' \barwedge BB_1H_1H_1'.$$

Considérons l'hexagone $CAKDBK_1$, inscrit dans la conique Γ. Les droites CA et DB se coupent en un point P, les droites AK ou AA_1 et BK_1 ou BB_1 ce coupent en un point Q. Les points P, Q sont indépendants de la position de Γ dans le faisceau (Γ); les droites DK et CK_1 se coupent sur la droite PQ. Par suite les points K et K_1 engendrent des ponctuelles projectives de supports AA_1 et BB_1. Il en est de même des points H, H_1 et les faisceaux (a_1), (b_1) sont projectifs.

Il ne peut exister une conique du faisceau (Γ) par rapport à laquelle la droite $A'B'$ serait la polaire des points distincts A_1, B_1, donc les faisceaux (a_1), (b_1) ne sont pas perspectifs.

Le point $S = a_1b_1$ est le pôle de s par rapport à la conique Γ. Lorsque cette conique parcourt le faisceau, le point S décrit une conique Δ passant par les points A', B'. Les points A, B, C, D jouant des rôles symétriques, la conique Δ passe par les conjugués harmoniques C' de C_1 par rapport à A, B; A_1'' de A_1' par rapport à A, D; B_1'' de B_1' par rapport à B, D; C_1'' de C_1' par rapport à C, D.

Désignons par A'', B'', C'' les points de rencontre de BC, CA, AB respectivement avec AD, BD, CD. L'ensemble des droites BC, AD forme une conique du faisceau (Γ). Les polaires de A_1, B_1 par rapport à cette conique passent par A'', donc ce point appartient à la conique Δ. Il en est de même des points B'', C''.

Considérons l'hexagône inscrit à Δ ayant pour sommets A', B_1'', A_1'', B' et complété par les tangentes en A', A_1'' à cette conique. Les droites $A'B_1''$ et $A_1''B'$ se coupent en C_1', les droites $B_1''A_1''$ et $A'B'$ se coupent en C_1, donc les tangentes en A', A_1'' à Δ se coupent sur s. Dans le triangle $A'A''A_1''$ inscrit à Δ, le côté $A'A_1''$ et la droite s sont conjugués, donc les points A_1, A_1' où $A'A''$ et $A''A_1''$ coupent s sont conjugués par rapport à Δ. De même, les points B_1, B_1' sont conjugués par rapport à Δ. L'involution des couples de points conjugués par rapport à Δ sur s est déterminée par les couples de points A_1A_1', B_1B_1' qui appartiennent à l'involution I découpée sur s par les coniques Γ, donc ces deux involutions coïncident.

2. Considérons maintenant le faisceau (Γ) formé par les coniques passant par deux couples de points imaginaires conjugués. En d'autres termes, si r_1, r_2 sont deux droites sur lesquelles on donne des involutions elliptiques, respectivement I_1, I_2, soit (Γ) le faisceau des coniques pour lesquelles les involutions des couples de points conjugués sur les droites r_1, r_2, sont I_1, I_2.

Désignons par R le point r_1r_2, par R_1, R_2 les conjugués de R dans I_1, I_2. La droite $r = R_1R_2$ est la polaire de R par rapport à toutes les coniques du faisceau.

Considérons une droite s distincte de r et soient A_1, A_2 ses points de rencontre avec r_1, r_2, A_1' et A_2' les conjugués de A_1, A_2 respectivement dans I_1, I_2. Soit enfin s' la droite $A_1'A_2'$.

Désignons par a_1, a_2 les polaires des points A_1, A_2 par rapport à une conique déterminée Γ du faisceau. Le point $P_1 = a_1r$ est le pôle de r_1 par rapport à Γ et le point $P_2 = a_2r$ celui de r_2. La polaire du point a_1r_2 par rapport à Γ est la droite A_1P_2; cette droite rencontre donc r_2 au point conjugué du point a_1r_2 dans l'involution I_2. Les points P_1, P_2 sont donc obtenus en projetant de A_1, A_1' les points des couples de l'involution I_2 sur la droite r. Lorsque la conique Γ varie dans le faisceau, les points P_1, P_2 engendrent donc des ponctuelles projectives. Par suite les droites a_1, a_2 engendrent des faisceaux projectifs. Ces faisceaux ne sont pas perspectifs, car à la droite $A_1'A_2' = s'$ correspond dans le second faisceau la droite $A_2'S$, S étant le point de rencontre des droites s, r. De même, à la droite s' correspond dans le premier faisceau la droite $A_1'S$.

Le point a_1a_2 est le pôle de la droite s par rapport à la conique Γ; le lieu de ce point est une conique Δ passant par les points A_1', A_2' et ayant pour tangentes en ces points respectivement les droites $A_1'S$, $A_2'S$. A la droite $r_1 = A_1'R$ correspond la droite $A_2'R_2 = r_2$ et par suite la conique Δ passe par le point R.

Désignons par I l'involution découpée sur la droite s par les coniques du faisceau (Γ). On sait que cette involution est déterminée par les couples R_1R_2 et SS_1, où S_1 est le point d'intersection des droites s, s'. La polaire du point S par rapport à Δ est la droite s', donc les points S, S_1 sont conjugués par rapport à Δ. Considérons d'autre part le triangle $RA_1'A_2'$ inscrit dans Δ; les droites s, s' sont conjuguées par rapport à Δ, par suite les points A_1, A_2 où s coupe RA_1', RA_2' sont conjugués par rapport à Δ. Il en résulte que l'involution des points conjugués par rapport à Δ sur s coïncide avec l'involution I.

3. Dans la démonstration précédente, nous n'avons pas fait usage du fait que les involutions données I_1, I_2 sont elliptiques. Par suite, cette démonstration s'applique encore aux cas où l'une au moins de ces involutions est hyperbolique c'est-à-dire aux cas où les coniques Γ rencontrent l'une au moins des droites r_1, r_2 en deux points réels. Dans le cas où les deux involutions sont hyperboliques, on obtient donc une nouvelle démonstration du théorème concernant les coniques passent par quatre points réels.

4. Considérons un triangle ABC et une droite s ne passant par aucun des sommets du triangle. Soit I une involution donnée sur s. Les coniques circonscrites à ABC et découpant sur s les couples de l'involution I forment un faisceau ayant quatre points-base A, B, C, D. En effet, si l'on considère deux quelconques de ces coniques, elles ont en commun un quatrième point D et les coniques passant par A, B, C, D découpent sur s une involution qui coïncide nécessairement avec I.

Supposons en particulier que s soit la droite impropre du plan et I l'involution absolue sur cette droite (involution dont les points doubles sont les points cycliques du plan). Alors les coniques Γ sont les hyperboles équilatères circonscrites au triangle ABC et D est l'orthocentre du triangle, car les droites BC et AD, par exemple, sont perpendiculaires. La conique Δ, lieu des centres des hyperboles équilatères, donne comme involution des points conjugués sur s l'involution absolue, donc c'est un cercle. Δ est précisément le cercle des neuf points du triangle ABC et on voit, en reprenant les notations du n⁰. 1, qu'il passe par:

les pieds A'', B'', C'' des hauteurs du triangle ABC;

les milieux A', B', C' des côtés de ce triangle;

les milieux A_1'', B_1'', C_1'' des segments AD, BD, CD des hauteurs compris entre les sommets et l'orthocentre.

Liége, le 19 juin 1929.