

V. VOLTERRA et J. PÉRES, *Leçons sur la composition et les fonctions permutables* (Collection de monographies sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de M. E. Borel). Paris, Gauthier-Villars, VIII-183 pages, 1924.

A l'occasion de ses recherches sur les équations intégrales, M. Volterra a été amené à introduire les notions suivantes : deux fonctions  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  étant données, on appelle *composition* l'opération

$$\int_x^y f(x, \xi) g(\xi, y) d\xi.$$

Si l'on a

$$\int_x^y f(x, \xi) g(\xi, y) d\xi = \int_x^y g(x, \xi) f(\xi, y) d\xi,$$

les fonctions  $f$  et  $g$  sont dites *permutables*.

On peut également envisager ces notions dans le cas où les limites des intégrales sont fixes, ce que les auteurs se bornent ici à signaler.

On arrive aux notions de composition et de permutabilité par le passage du discontinu au continu. Envisageons des tableaux carrés de  $n^2$  éléments, chaque élément étant affecté de deux indices entiers (on peut prendre, par exemple, les coefficients d'une substitution linéaire homogène portant sur  $n$  lettres). On sait ce que l'on entend par produit de deux tableaux carrés de  $n^2$  éléments, et par tableaux (ou substitutions) permutables. Le passage de ces notions au continu se fait en remplaçant les indices entiers par des variables continues et les sommations relatives à ces indices par des intégrations portant sur les variables correspondantes.

Une fois acquises les notions de composition et de permutabilité, il s'agit de construire un calcul fonctionnel des fonctions de composition analogue aux théories classiques du calcul algébrique et du calcul infinitésimal. C'est ce que font les auteurs dans leur ouvrage. Citons, par exemple, les résultats : le produit de deux variables correspond à la composition de deux fonctions, et dans tout problème algébrique ou différentiel, les variables peuvent être

remplacées par des fonctions permutables. On est conduit finalement aux notions de logarithme de composition, de dérivée et d'intégrale de composition. Naturellement, on n'arrive à ces notions qu'après avoir résolu des problèmes tels que la détermination des fonctions permutables avec une fonction donnée, la recherche des transformations qui conservent la composition, etc.

Le livre de MM. Volterra et Péres est écrit dans le même esprit que la plupart de ceux déjà parus dans la collection de M. Borel, c'est-à-dire que l'on peut en aborder l'étude sans autre préparation que celle que donne, par exemple, le doctorat de nos Universités belges. Il nous reste à signaler que les résultats exposés sont entièrement dus aux auteurs.

L. GODEAUX.