EXERCICES DE GÉOMÉTRIE PROJECTIVE,

par M. LUCIEN GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

Soient ABC un triangle, Γ_2 une conique touchant AB en A et BC en C, Γ_3 une conique touchant AC en A et BC en B. Le produit des polarités dont Γ_2, Γ_3 sont les coniques fondamentales est une homographie, non homologique, de période trois. Les droites qui projettent du point A les points unis de l'homographie et d'autre part les points de rencontre de BC avec les droites unies de l'homographie, forment deux groupes de l'involution cyclique de période trois ayant, dans le faisceau de sommet A, les droites unies AB, AC. Ces deux groupes sont échangés par l'involution du second ordre ayant les mêmes droites unies.

1. Supposons en premier lieu les éléments trouvés réels ; nous démontrerons, sans avoir recours aux notions métriques, que le produit des polarités par rapport à Γ_2, Γ_3, est une homographie de période trois, et que, de plus, les coniques Γ_2, Γ_3 n'ont, en dehors du point A, qu'un seul point réel commun.

Désignons par θ_2, θ_3 les polarités relatives à Γ_2, Γ_3 et considérons l'homographie

$$H = \theta_3\theta_2,$$

θ_2 étant opérée en premier lieu. Au point A, θ_2 fait correspondre la droite AB et à cette droite θ_3 fait correspondre le point C. A ce point, θ_2 fait correspondre BC et à cette droite, θ_3 fait correspondre B. Enfin, à B, θ_2 fait correspondre AC et à cette droite, θ_3 fait correspondre A. On voit donc que H fait correspondre C à A, B à C et A à B. Comme ces points ne sont pas en ligne droite, H n'est pas une homologie ; elle possède donc au moins un point uni réel U qui ne se trouve pas sur les côtés du triangle ABC. On a donc

$$H = \begin{pmatrix} \mathrm{UABC} \\ \mathrm{UCAB} \end{pmatrix}, \qquad H^2 = \begin{pmatrix} \mathrm{UABC} \\ \mathrm{UBCA} \end{pmatrix}, \qquad H^3 = \begin{pmatrix} \mathrm{UABC} \\ \mathrm{UABC} \end{pmatrix} = 1.$$

L'homographie H *a donc la période trois.*

Soient u la droite unie de l'homographie H associée à U ; A', B', C' les points où u rencontre respectivement les droites BC, CA, AB. Sur u, H détermine l'homographie

$$h = \begin{pmatrix} \mathrm{A'B'C'} \\ \mathrm{C'A'B'} \end{pmatrix}.$$

Au segment A'B'C', h fait correspondre le segment C'A'B', par suite h est une projectivité directe. Au segment A'B' ne contenant pas C', h fait correspondre le segment C'A' ne contenant pas B'.

De même, au segment $B'C'$ ne contenant pas A' et au segment $C'A'$ ne contenant pas B', h fait respectivement correspondre les segments $A'B'$ ne contenant pas C' et $B'C'$ ne contenant pas A'. Il en résulte que l'homographie h est elliptique. Par suite, *l'homographie* H *ne possède qu'un point uni réel* U *et une droite unie réelle* u, *ne passant pas par* U.

2. A un point P faisons correspondre le point P′ intersection des polaires de P par rapport aux coniques Γ_2, Γ_3. Lorsque P décrit une droite a passant par U, P′ décrit projectivement une droite a' passant également par U. Lorsque P décrit une droite d distincte de u et ne passant pas par U, P′ décrit projectivement une conique passant par U. Il en résulte que les droites a, a' se correspondent dans une projectivité qui est d'ailleurs une involution I. Cette involution est hyperbolique, car la droite UA est unie. Désignons par s cette droite, par s' la seconde droite unie de l'involution.

Lorsque P parcourt la droite s, P′ parcourt également cette droite et les couples P, P′ forment une involution ayant un point uni A. Cette involution est hyperbolique et le second point uni D appartient aux coniques Γ_2, Γ_3.

Si le point P appartient à s', il en est de même de P′ et les couples P, P′ forment une involution. Supposons que cette involution puisse être hyperbolique et soient D_1, D_2 ses points doubles. Mais alors, le point commun aux droites AD_1, DD_2, par exemple, point qui est certainement distinct de U, aurait mêmes polaires par rapport à Γ_2, Γ_3, puisque D_1, D_2 seraient des points communs à ces deux coniques. Ce point serait donc uni par H, ce qui est impossible.

On en conclut que les coniques Γ_2, Γ_3 *ne peuvent avoir en commun que deux points réels* A, D et que les involutions des couples de points conjugués par rapport à ces deux coniques, sur la droite s', coïncident en une même involution elliptique.

3. Considérons la réciprocité

$$\theta_1 = \theta_2\theta_3\theta_2 = \theta_3\theta_2\theta_3.$$

Nous avons

$$\theta_1^2 = H^3 = 1$$

et par suite θ_1 est involutive. Aux points A, B, C, θ_1 fait correspondre les droites BC, AB, AC, par suite θ_1 est une polarité dont la conique fondamentale Γ_1 touche aux points B, C les droites BA, CA.

On a d'ailleurs

$$H = \theta_2\theta_1 = \theta_1\theta_3.$$

4. Rapportons la figure à un triangle de référence dont le sommet O_1 coïncide avec A, les sommets O_2, O_3 étant respectivement situés sur les droites AB, AC. Soit

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \qquad (a_1 \neq 0)$$

l'équation de la droite BC. Les équations des coniques Γ_2, Γ_3 peuvent respectivement s'écrire

$$x_3(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + \lambda_2x_2^2 = 0, \qquad (\Gamma_2)$$

$$x_2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + \lambda_3x_3^2 = 0. \qquad (\Gamma_3)$$

L'homographie H a pour équations

$$\frac{x_2'}{x_3} = \frac{a_1x_1' + a_2x_2' + a_3x_3'}{2\lambda_2\alpha_2} = \frac{2\lambda_3x_3'}{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3}. \qquad (\mathrm{H})$$

Les points unis de cette homographie sont donnés par

$$\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3}{\varepsilon(\lambda_2\lambda_3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{x_2}{\varepsilon\lambda_3^{\frac{1}{3}}}, = \frac{x_3}{\varepsilon^2\lambda_2^{\frac{1}{3}}},$$

et les droites unies par

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + 2(\lambda_2^2\lambda_3)^{\frac{1}{3}}\varepsilon x_2 + 2(\lambda_2\lambda_3^{\frac{1}{3}})\varepsilon^2x_3 = 0,$$

ε étant une racine cubique de l'unité. En particulier, pour $\varepsilon = 1$, on obtient le point U et la droite *u*.

Les droites qui projettent du point A les points unis de H et par suite les points communs à Γ_2, Γ_3 sont données par

$$\lambda_2x_2^3 - \lambda_3x_3^3 = 0. \qquad (1)$$

Celles qui projettent de A les points de rencontre de la droite BC avec les droites unies de H sont données par

$$\lambda_2x_2^3 + \lambda_3x_3^3 = 0. \qquad (2)$$

Les droites (1) et (2) forment deux groupes de l'involution cyclique engendrée dans le faisceau de centre A par l'homographie

$$x_2' : x_3' = x_2 : \varepsilon x_3, \qquad (3)$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. Ces deux groupes sont transformés l'un dans l'autre par l'involution

$$x_2' : x_3' = x_2 : - x_3 \qquad (4)$$

L'homographie (3) engendre, dans le faisceau de centre A, une involution cyclique d'ordre trois, I_3^1, ayant comme éléments unis les droites AB, AC. L'homographie (4) engendre une involution I_2 ayant les mêmes éléments unis. On voit donc que *les droites qui projettent du point* A *les points unis de l'homographie* H *et les points de rencontre* *de la droite* BC *avec les droites unies de cette homographie, forment deux groupes de l'involution* I_3^1 *transformés l'un dans l'autre par l'involution* I_2.

Les couples de coniques Γ_2, Γ_3 sont en nombre ∞^4, par suite il y a ∞^4 homographies H et ∞^3 d'entre elles donnent lieu aux mêmes groupes de l'involution I_3^1.

La conique Γ_1 a pour équation

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + 8\lambda_2\lambda_3x_2x_3 = 0.$$

Remarquons la droite que BC étant fixée, il y a ∞^2 couples de coniques Γ_2, Γ_3 ; ils ne donnent lieu qu'à ∞^1 coniques Γ_1.