SUR CERTAINS FAISCEAUX DE SEXTIQUES DE HALPHEN,

par M. L. Godeaux, Professeur à l'Université de Liége.

Halphen a montré l'existence de faisceaux de sextiques ayant neuf points doubles (1) ; ces faisceaux peuvent être construits en utilisant la représentation plane de la surface cubique, comme l'a montré R. Sturm dans le cas où les neuf points-base sont distincts (2). Récemment, M. Campedelli a montré l'existence de faisceaux de Halphen dont les courbes ont quatre tacnodes (points de rebroussement de seconde espèce), les tangentes tacnodales passant par un même point, double pour les courbes du faisceau (3). M. Campedelli a en outre montré que la cubique passant par les tacnodes en y touchant les tangentes tacnodales, et par le point de concours de ces droites, a ce dernier point comme point sextatique (en d'autres termes, il existe une conique ayant un contact du cinquième ordre avec la cubique en ce point). Inversement, si P est un point sextatique d'une cubique plane Γ et si A, B, C, D sont les points de contact des tangentes à Γ menées par P, il existe un faisceau de sextiques ayant des tacnodes en A, B, C, D, les tangentes tacnodales passant par P, et un point double en P. (On suppose que P n'est pas un point d'inflexion de Γ ; dans ce cas, les sextiques sont réductibles). Dans cette note, à titre d'exercice de géométrie supérieure, nous établissons les résultats de M. Campedelli en utilisant la représentation plane de la surface cubique.

Nous terminons en établissant le théorème suivant (4) : *Considérons une cubique plane passant par les sommets et les points diagonaux d'un quadrangle complet. Les tangentes à cette cubique aux sommets du quadrangle passent par un même point ; si ce point appartient à une des droites passant par deux des points diagonaux du quadrangle, il est sextatique pour la cubique.*

1. Considérons les cubiques planes C_3 passant par les sommets O_1, O_2, O_3 d'un triangle et touchant respectivement en ces points des droites passant par un point O_0 non situé sur les côtés du triangle. En prenant le triangle comme figure de référence et le point O_0 comme point unitaire, les cubiques C_3 ont pour équation

$$\lambda_1 x_1^2(x_2 - x_3) + \lambda_2 x_2^2(x_3 - x_1) + \lambda_3 x_3^2(x_1 - x_2) + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0. \quad (1)$$

(1) Bulletin de la Société math. de France, 1881-82.

(2) Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, t. IV. Leipzig, 1909. Voir aussi notre note dans *Mathesis*, 1925-154, où nous avons retouvé ce théorème.

(3) Sopra alcuni piani doppi... (Rend. della R. Accad. N. dei Lincei, avril 1932).

(4) Probablement connu.

Les courbes C_3 forment un système linéaire $|C_3|$, de dimension et de degré trois. Rapportons projectivement les courbes C_3 aux plans de l'espace en posant

$$\frac{X_1}{x_1^2(x_2-x_3)}=\frac{X_2}{x_2^2(x_3-x_1)}=\frac{X_3}{x_3^2(x_1-x_2)}=\frac{X_4}{x_1x_2x_3}. \tag{2}$$

Aux points du plan $O_1O_2O_3=\varpi$ correspondent les points de la surface cubique F d'équation

$$X_1X_2X_3+X_4^2(X_1+X_2+X_3)=0. \tag{3}$$

La surface F possède trois points doubles coniques $O_1'(1, 0, 0, 0)$, $O_2'(0, 1, 0, 0)$, $O_3'(0, 0, 1, 0)$.

2. Les courbes C_3 touchant, en O_1 une droite $x_3=\mu x_2$, où μ est différent de l'unité, ont pour équation

$$\mu(\lambda_3\mu+\lambda_4)x_2^2(x_3-x_1)+\lambda_3x_3^2(x_1-x_2)+\lambda_4x_1x_2x_3=0.$$

A ces courbes correspondent sur F les sections faites par les plans passant par la droite

$$\frac{X_2}{-1}=\frac{X_3}{\mu^2}=\frac{X_4}{\mu}.$$

Lorsque μ varie, cette droite engendre le cône

$$X_2X_3+X_4^2=0,$$

tangent à la surface F au point O_1'. Par suite, aux points du plan ϖ, infiniment voisins de O_1, correspondent, sur F, les points infiniment voisins du point double O_1'.

Désignons par O_{11} le point infiniment voisin du point O_1 sur la droite O_1O_0. Le point O_{11} appartient à toutes les courbes C_3.

Les courbes C_3 du réseau

$$\lambda_1x_1^2(x_2-x_3)+\lambda_2x_2^2(x_3-x_1)+\lambda_3x_3^2(x_1-x_2)$$
$$+(\mu\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\,x_1x_2x_3=0 \tag{4}$$

ont un contact du second ordre en O_1. A ces courbes correspondent les sections de F par les plans passant par le point

$$X_1+\mu X_3=0,\qquad X_2+X_4=0,\qquad X_3-X_4=0.$$

Ce point correspond donc au point du plan ϖ infiniment voisin de

O_{11}, appartenant à toutes les courbes (4). Le lieu de ce point, lorsque μ varie, est la droite

$$X_2 = -X_3 = -X_4 \qquad (a_1)$$

que nous désignons par a_1, qui fait partie de l'intersection de F et du cône tangent à cette surface au point O'_1. La droite a_1 représente donc le domaine du point O_{11}.

De même, aux domaines des points O_2, O_3 du plan ϖ correspondent respectivement les domaines des points doubles coniques O'_2, O'_3, sur F. Si O_{22}, O_{33} sont les points infiniment voisins de O_2, O_3 situés sur les droites O_2O_0, O_3O_0, au domaine de O_{22} correspondent sur F les points de la droite a_2 d'équations

$$X_3 = -X_1 = -X_4 \qquad (a_2)$$

et au domaine de O_{33}, les points de la droite a_3 d'équations

$$X_1 = -X_2 = -X_4. \qquad (a_3)$$

3. La droite O_2O_3 est rencontrée en un point variable par les courbes C_3, il lui correspond donc sur F une droite que nous désignerons par b_1 et qui a pour équations

$$X_1 = X_4 = 0. \qquad (b_1)$$

La surface F touche le plan $X_1 = 0$ en tout point de cette droite, ainsi d'ailleurs que les cônes tangents à F en O'_2, O'_3.

Nous désignerons de même par b_2, b_3 les droites de F qui correspondent à O_3O_1, O_1O_2 et qui possèdent des propriétés analogues à celles de b_1.

La droite O_1O_0 est rencontrée en un point variable par les courbes C_3 ; il lui correspond donc sur F une droite, que nous désignerons par r_1, d'équations

$$X_1 = 0, \qquad X_2 + X_3 = 0. \qquad (r_1)$$

Aux droites O_2O_0, O_3O_0 correspondent de même sur F_1 les droites r_2, r_3 d'équations

$$X_2 = 0, \qquad X_3 + X_1 = 0, \qquad (r_2)$$

$$X_3 = 0, \qquad X_1 + X_2 = 0. \qquad (r_3)$$

Les trois droites r_1, r_2, r_3 forment l'intersection complète de la surface F et du plan tangent

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0$$

en $O'_4(0, 0, 0, 1)$ à cette surface. Le point O'_4 correspond au point

O_0 et tout plan passant par O_4 coupe F suivant une cubique ayant un point d'inflexion en O'_4.

4. La conique γ_1 d'équation

$$x_2x_3 - x_3x_1 - x_1x_2 = 0 \tag{γ_1}$$

touche O_2O_0 en O_2, O_3O_0 en O_3 et passe par O_1 ; elle est donc rencontrée en un point variable par les courbes C_3 et il lui correspond, sur F, une droite c_1 d'équations

$$X_2 = -X_3 = X_4. \tag{c_1}$$

Cette droite appartient au cône tangent à F en O'_1. De plus, le plan $X_2 + X_3 = 0$ coupe F suivant les trois droites r_1, a_1, c_1 ; cette section plane de F correspond à la cubique C_3 formée de la conique γ_1 et de la droite O_1O_0.

On définit de même, par permutation tournante, les coniques γ_2, γ_3 et les droites correspondantes c_2, c_3 de F.

5. A une droite du plan ϖ correspond sur F une cubique gauche. Considérons en particulier une droite d passant par O_0. Ses équations paramétriques peuvent s'écrire

$$\rho x_i = a_it + 1, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Les équations paramétriques de la cubique gauche correspondante sur F, sont

$$\begin{aligned}
\rho X_1 &= (a_2 - a_3)(a_1t + 1)[(a_2 + a_3)t + 2]t,\\
\rho X_2 &= (a_3 - a_1)(a_2t + 1)[(a_3 + a_1)t + 2]t,\\
\rho X_3 &= (a_1 - a_2)(a_3t + 1)[(a_1 + a_2)t + 2]t,\\
\rho X_4 &= (a_1t + 1)(a_2t + 1)(a_3t + 1).
\end{aligned} \tag{6}$$

Cette cubique passe par le point O'_4 et y a comme plan osculateur le plan tangent à la surface F.

Considérons une cubique C_3 passant par O_0 et soit

$$\lambda_1x_1^2(x_2 - x_3) + \lambda_2x_2^2(x_3 - x_1) + \lambda_3x_3^2(x_1 - x_2) = 0 \tag{7}$$

son équation. La polaire du point O_0 par rapport à cette cubique a pour équation

$$\lambda_1x_1(x_2 - x_3) + \lambda_2x_2(x_3 - x_1) + \lambda_3x_3(x_1 - x_2) = 0.$$

Cette conique touche la courbe (7) en O_0 et la rencontre en O_1, O_2, O_3, et en un point y. Nous supposerons que la droite (5) passe par ce point et est donc la quatrième tangente menée de O_0 à la courbe (7). Observons que le point O_0 ne peut être un point d'inflexion pour la cubique (7), si celle-ci est, comme nous le supposerons, irréductible Dans ces conditions, nous pouvons supposer sans restriction que les coordonnées du point y sont précisément a_1, a_2, a_3. L'équation (7) devient alors

$$a_2a_3x_1^2(x_2 - x_3) + a_3a_1x_2^2(x_3 - x_1) + a_1a_2x_3^2(x_1 - x_2) = 0. \qquad (7')$$

La cubique gauche (6) est tangente à la section de F par le plan

$$a_2a_3X_1 + a_3a_1X_2 + a_1a_2X_3 = 0,$$

qui correspond à la cubique (7′), au point Y, qui correspond au point y.

6. Supposons qu'il existe une courbe plane du sixième ordre C_6 ayant un point double en O_0 et des tacnodes aux points O_1, O_2, O_3, y, les tangentes tacnodales passant par O_0.

Aux sections de F par les quadriques de l'espace, correspondent dans le plan ϖ des sextiques ayant des tacnodes en O_1, O_2, O_3, les tangentes tacnodales passant par O_0. Par suite, à la courbe C_6 correspond sur F une sextique Γ_6 découpée par une quadrique Q tangente à la surface F en O'_4 et en Y.

Désignons par Γ_3 la section plane de F qui correspond à la courbe (7′), par α son plan. La conique (Q, α) doit avoir quatre points d'intersection avec Γ_3 réunis en Y, c'est-à-dire un contact du troisième ordre en ce point avec cette courbe. D'autre part, la conique (Q, α) touche Γ_3 au point O'_4 qui est un point d'inflexion pour cette courbe. On sait que le tangentiel Y″ de Y sur Γ_3, doit avoir lui-même pour tangentiel le point O'_4. Or, les points de contact des tangentes à Γ_3 menées par O'_4 sont dans le plan $X_4 = 0$. Le point Y′ se trouve donc sur une des droites b_1, b_2, b_3. Supposons, pour fixer les idées, que Y′ appartienne à la droite b_1 ; ses coordonnées sont alors $Y'_1 = 0$, $Y'_2 = a_2$, $Y'_3 = -a_3$, $Y'_4 = 0$.

Pour exprimer que Y′ est le tangentiel de Y, écrivons que Y appartient à la première polaire de Y′ par rapport à F. On a ainsi,

$$a_1^2a_2a_3(a_2 - a_3)(a_1a_2 + a_1a_3 - a_2a_3) = 0.$$

La courbe (7′) étant irréductible par hypothèse, on ne peut avoir $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ ou $a_3 = 0$, ni $a_2 = a_3$. La condition cherchée est donc

$$a_1a_2 + a_1a_3 - a_2a_3 = 0. \qquad (8)$$

Inversement, si la condition (8) est satisfaite, Y' est le tangentiel de Y et il existe une conique touchant Γ_3 en O'_4 et ayant un contact du troisième ordre avec cette courbe au point Y.

7. Nous allons former les équations de la conique (Q, α). Le point Y a pour coordonnées $a_2 - a_3$, $a_2 + a_3$, $-(a_2 + a_3)$, $a_2 + a_3$. Le plan tangent en ce point à la surface F a pour équation

$$a_3X_2 + a_2X_3 + (a_2 - a_3)X_4 = 0.$$

Considérons le faisceau de surfaces cubiques déterminé par la surface F et par l'ensemble des plans tangents à F en O'_4, Y, ce dernier compté deux fois. Il existe une seule surface de ce faisceau contenant la droite O'_4Y' ; elle a pour équation

$$\begin{aligned}(X_1 + X_2 + X_3)[a_3X_2 + a_2X_3 + (a_2 - a_3)\, X_4]^2 \\ - (a_2 - a_3)^2[X_1X_2X_3 + X_4^2\,(X_1 + X_2 + X_3)] = 0.\end{aligned}$$

Cette surface coupe le plan α suivant la droite O_4Y' et la conique (Q, α) ; celle-ci a donc pour équations

$$\left.\begin{aligned}[a_3X_2 + a_2X_3 + 2(a_2 - a_3)X_4](a_2X_2 + a_3X_3) + (a_2 - a_3)^2X_2X_3 = 0, \\ (a_2 + a_3)X_1 + a_3X_2 + a_2X_3 = 0.\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

8. Une quadrique passant par la conique (9) a une équation de la forme

$$\left.\begin{aligned}[(a_2 + a_3)X_1 + a_3X_2 + a_2X_3]^2 + [(a_2 + a_3)X_1 + a_3X_2 \\ + a_2X_3](AX_2 + BX_3 + CX_4) \\ + D[\{a_3X_2 + a_2X_3 + 2(a_2 - a_3)X_4\}(a_2X_2 + a_3X_3) \\ + (a_2 - a_3)^2X_2X_3] = 0.\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Pour que cette quadrique coupe F suivant la courbe Γ_6 qui correspond à la courbe C_6 que nous voulons construire, il faut tout d'abord qu'elle ait mêmes plans tangents que la surface F aux points O, Y. Cela donne les conditions

$$C = 2(a_2 - a_3)\, D, \qquad A - B + C = 0.$$

Dans ces conditions, la courbe du plan ϖ que l'on obtient en remplaçant dans l'équation (10), X_1, X_2, X_3, X_4 par leurs expressions (2), possède un point double en O_0 et un point de rebroussement ordinaire en y. Pour que ce soit la courbe C_6, il suffira d'exprimer que la droite O_0y la rencontre en quatre points confondus en y ; cela entraîne

$$a_2A - a_3B + (a_2^2 - a_3^2)D = 0.$$

On en déduit finalement l'équation de la courbe C_6,

$$
\begin{aligned}
&[(a_2 + a_3)x_1^2(x_2 - x_3) + a_3x_2^2(x_3 - x_1) + a_2x_3^2(x_1 - x_2)]^2 \\
&+ h(a_2 - a_3)^2[(a_2 + a_3x_1^2(x_2 - x_3) + a_3x_2^2(x_3 - x_1) + a_2x_3^2(x_1 - x_2)] \\
&\qquad\qquad (x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3) \\
&+ h(a_2 - a_3)[\{a_3x_2^2(x_3 - x_1) + a_2x_3^2(x_1 - x_2) + 2(a_2 - a_3)x_1x_2x_3\} \\
&\qquad\qquad \{a_2x_2^2(x_3 - x_1) + a_3x_3^2(x_1 - x_2)\} \\
&+ (a_2 - a_3)^2x_2^2x_2^3(x_3 - x_1)(x_1 - x_2)] = 0.
\end{aligned}
$$

La courbe C_6 appartient à un faisceau de HALPHEN, h étant le paramètre variable. Pour $h = 0$, ce faisceau comprend la cubique (7), comptée deux fois.

9. Proposons-nous maintenant de rechercher dans quelles conditions la cubique plane irréductible (7) possède un point sextatique en O_0, c'est-à-dire dans quelles conditions il existe une conique ayant un contact du cinquième ordre avec cette cubique au point O_0. On sait que pour cela, il faut et il suffit que le tangentiel z du point O_0 soit un point d'inflexion.

La tangente en O_0 à la cubique (7) a pour équations paramétriques

$$\rho x_i = \lambda_i t + 1, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

par suite, le tangentiel z de O_0 a pour coordonnées

$$z_1 : z_2 : z_3 = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 : \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_1 : \lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2.$$

Pour que le point z soit un point d'inflexion, la conique polaire de ce point doit dégénérer, ce qui donne

$$z_1z_2z_3(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)(z_1 - z_2) = 0.$$

Si l'un des trois derniers facteurs était nul, la cubique (7) dégénérerait. La condition cherchée est donc

$$(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2) = 0.$$

Pour la cubique (7'), cette condition devient

$$[a_2a_3 - a_1(a_2 + a_3)]\,[a_3a_1 - a_2(a_3 + a_1)]\,[a_1a_2 - a_3(a_1 + a_2)] = 0.$$

Le premier facteur, égalé à zéro, donne précisément la condition (8). Il est clair qu'en égalant à zéro le second ou le troisième facteur, on obtiendrait les conditions correspondant aux cas où le point Y' appartient à la droite b_2 ou à la droite b_3.

La condition pour qu'il existe un faisceau de HALPHEN dont les courbes du sixième ordre aient quatre tacnodes, les tangentes tacnodales passant par le neuvième point double des courbes, et la condition pour que la cubique plane faisant partie du faisceau ait un point sextatique en ce neuvième point, sont donc les mêmes.

10. Observons que les droites O_2O_3 et O_1y, par exemple, coupent la cubique (7') en un même point. La condition (8) exprime que ce point est le tangentiel de O_0. Nous allons en déduire une nouvelle construction de la cubique (7') satisfaisant à la condition (8).

Adoptons de nouvelles notations. Soient A, A_1, A_2, A_3 les sommets d'un quadrangle complet. Prenons $A_1A_2A_3$ comme triangle de référence, A comme point unitaire. Soient ensuite A'_1, A'_2, A'_3 les points diagonaux du quadrangle, A'_1 par exemple appartenant aux droites AA_1, A_2A_3. Les cubiques planes passant par les sommets et les points diagonaux du quadrangle donné ont pour équation

$$\alpha_1 x_2 x_3 (x_2 - x_3) + \alpha_2 x_3 x_1 (x_3 - x_1) + \alpha_3 x_1 x_2 (x_1 - x_2) = 0. \qquad (11)$$

Les tangentes à la cubique (11) aux points A, A_1, A_2, A_3 concourent en un même point $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ qui appartient d'ailleurs à la cubique. Si le tangentiel du point P est l'un des points diagonaux du quadrangle, P est un point sextatique de la cubique. La condition s'exprime analytiquement par l'équation

$$(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2) = 0,$$

la cubique (11) étant supposée irréductible. On en conclut que le point P doit appartenir à l'une des droites joignant deux des points diagonaux du quadrangle.