Extrait de la *Revue de l'Université de Bruxelles*
n° 2, décembre 1924-janvier 1925.

S. LEFSCHETZ, *L'Analysis situs et la géométrie algébrique* (Collection de monographies sur la théorie des fonctions, publiée sous la direction de M. Emile Borel). Paris, Gauthier-Villars, 1924.

L'expression « géométrie algébrique » qui figure dans le titre de cet ouvrage, doit être prise dans le sens : étude des propriétés des variétés algébriques qui restent invariantes par rapport aux transformations birationnelles de ces variétés.

Les premières recherches de géométrie algébrique ont naturellement porté sur les courbes algébriques. Les procédés d'investigation utilisés par les géomètres peuvent se ranger en trois catégories : le procédé géométrique, qui a abouti à la constitution de l'élégante théorie des séries de groupes de points appartenant à une courbe algébrique de Brill, Noether et de leurs continuateurs (Segre, MM. Bertini, Castelnuovo...) ; le procédé analytique, fondé sur la considération des intégrales abéliennes; enfin le procédé topologique, basé sur l'étude des surfaces de Riemann, une courbe algébrique de genre p étant remplacée, par exemple, par un disque de Clifford à p trous.

L'étude des surfaces algébriques fut ensuite abordée, et les premières recherches sur ce sujet remontent à Cayley et à Clebsch.

Le procédé d'investigation géométrique conduisit Noether à la théorie des systèmes de courbes algébriques tracées sur une surface algébrique, théorie qui fut bientôt portée à un haut degré de perfection par les admirables travaux de l'Ecole géométrique italienne (MM. Castelnuovo, Enriques, Severi, etc.).

L'extension de la notion d'intégrale abélienne attachée à une courbe algébrique conduisit tout d'abord Clebsch et Noether à la notion d'intégrale double appartenant à une surface algébrique et, plus tard, M. Picard à la notion d'intégrale de différentielle totale attachée à une surface.

Dès le début, de profondes différences se manifestèrent entre les courbes et les surfaces.

Une courbe algébrique peut être transformée birationnellement en une courbe plane C d'ordre m, possédant au plus des points doubles à tangentes distinctes. Le genre p de la courbe C est le nombre des courbes adjointes d'ordre m-3 (courbes passant simplement par les points doubles de C) linéairement indépendantes. C'est aussi le nombre d'intégrales abéliennes de première espèce, linéairement indépendantes, attachées à la courbe C.

Si l'on passe aux surfaces, on sait (B. Levi, Chisini) que l'on peut transformer birationnellement une surface algébrique quelconque en une surface F d'ordre m ayant une courbe double possédant certains points triples à la fois pour la courbe et la surface. Le nombre des surfaces adjointes d'ordre m-4 à la surface F (surfaces passant simplement par la courbe double) linéairement indépendantes, est un nombre invariant vis-à-vis des transformations birationnelles de F, nombre appelé genre géométrique p_g de la surface. p_g est aussi le nombre des intégrales doubles de première espèce, linéairement indépendantes, attachées à F.

On peut exprimer le genre p de la courbe C en fonction de l'ordre m et du nombre de points doubles de la courbe. Si l'on recherche une formule analogue pour les surfaces, cette formule donne un nombre qui est en général égal au genre géométrique p_g, mais qui peut être inférieur à p_g. Ce nombre est le genre arithmétique p_a de F; il est, lui aussi, invariant pour les transformations birationnelles de la surface.

La différence, positive ou nulle, p_g-p_a, est précisément égale au nombre des intégrales de différentielles totales de Picard, de première espèce, linéairement indépendantes, attachées à la surface F. C'est là le beau théorème de Castelnuovo-Enriques-Severi.

Mentionnons également cet important résultat : M. Picard a montré que le nombre des courbes logarithmiques des intégrales de Picard de troisième espèce, attachées à la surface F, admet un minimum, $\rho+1$. M. Severi a ensuite montré que toute courbe algébrique tracée sur la surface F s'obtient par additions et soustractions, à partir de ρ courbes tracées sur la surface, contituant ainsi une théorie de la base pour les surfaces.

Un des derniers mémoires de H. Poincaré est consacré à une démonstration nouvelle du théorème de Castelnuovo-Enriques-Severi. Elle est basée sur l'emploi de certaines sommes abéliennes permettant de caractériser les courbes algébriques tracées sur une surface algébrique .Ces considérations ont aussi permis à Poincaré de retrouver les résultats de M. Severi sur la base.

Le procédé topologique de recherche avait été utilisé, dans l'étude des surfaces algébriques, d'une manière en quelque sorte sporadique. (Du reste, les trois procédés de recherche, dans l'étude des surfaces comme des courbes, furent en général utilisés simultanément par un même auteur.) C'est, au contraire, ce procédé qui est employé systématiquement dans ses travaux par M. Lefschetz, comme il l'avait été déjà par ce géomètre dans un Mémoire auquel l'Académie des Sciences a décerné le prix Bordin en 1917.

Après avoir, dans un premier chapitre, exposé les notions d'Analysis situs dont il aura besoin, M. Lefschetz aborde l'étude topologique des surfaces algébriques. Une telle surface est représentable par une variété riemanienne réelle et bilatère à quatre dimensions, mais, contrairement à ce qui se passe pour les courbes algébriques, cette variété n'est pas la plus générale possible. Ce qui la distingue parmi les variétés réelles, c'est la présence de courbes algébriques tracées sur la surface. De là, l'énoncé du problème étudié par M. Lefschetz : *Etudier les propriétés topologiques des surfaces algébriques, surtout en tant qu'elles se relient à celles de leurs courbes algébriques.*

Nous ne pouvons songer à donner ici les résultats très importants obtenus par l'auteur dans cette voie. Bornons-nous à dire qu'ils lui permettent, dans le chapitre IV, d'interpréter d'une manière nouvelle les résultats obtenus par H. Poincaré, en faisant intervenir des propriétés topologiques et les périodes des intégrales doubles de première espèce. Précisément, pour que des sommes abéliennes considérées par Poincaré, prises *a priori,* correspondent effectivement à une courbe algébrique tracée sur la surface, il faut qu'existe un certain cycle à deux dimensions pour lequel les périodes des intégrales doubles de première espèce soient nulles. Comme l'écrit M. Lefschetz, « on peut entrevoir dans cette direction la possibilité « de réunir en une doctrine unique ce que l'on sait aujourd'hui sur « les surfaces algébriques, tant au point de vue géométrique qu'au « point de vue transcendant ».

M. Lefschetz passe ensuite à l'étude topologique des variétés algébriques à plus de deux dimensions.

Un dernier chapitre est consacré aux fonctions abéliennes. En utilisant quelques théorèmes d'Analysis situs, l'auteur démontre le théorème d'existence de Weierstrass, sous des conditions un peu plus générales que d'ordinaire. Vient ensuite l'étude des variétés abéliennes, notamment au point de vue de la base.

Le volume se termine par deux notes, l'une sur les intégrales doubles de seconde espèce et les intégrales de Picard de troisième espèce des surfaces algébriques, l'autre sur les modèles de variétés réelles de M. Volterra.

Les travaux de M. Lefschetz ouvrent des vues nouvelles sur l'étude si délicate des surfaces et des variétés algébriques; la lecture de son livre est indispensable à ceux qui veulent cultiver cette partie de la science et elle les conduira sans doute à une ample moisson de résultats nouveaux.

L. GODEAUX.

5312. — Soc. an. M. Weissenbruch, imprimeur du Roi, 49, rue du Poinçon, Bruxelles.