SUR LES ÉGALITÉS DANS LA GERBE.*

par M. L. Godeaux, Professeur à l'Université de Liége.

Rappelons que l'on appelle *polarité absolue*, dans une gerbe dont le sommet S est à distance finie, la polarité qui fait correspondre à une droite passant par S, le plan perpendiculaire passant par S. La polarité absolue est donc la polarité par rapport au cône isotrope de sommet S. On appelle *égalité* dans la gerbe de sommet S une homographie qui conserve la polarité absolue, c'est-à-dire qui fait correspondre à une droite et à un plan perpendiculaires passant par S, une droite et un plan perpendiculaires passant par S. On sait que les égalités d'une gerbe sont des rotations. Nous nous proposons d'établir, sans avoir recours à des notions métriques, un théorème dont le précédent est un corollaire immédiat (1). Nous n'envisagerons que des éléments réels.

1. Soit I une involution elliptique donnée sur une ponctuelle s. Proposons-nous de déterminer les projectivités ω permutables avec l'involution I, c'est-à-dire telle que l'on ait

$$\omega I = I\omega.$$

Si M est un point uni de ω, I lui fait correspondre un point M' qui est aussi un point uni de ω. La projectivité ω ne peut donc être parabolique.

---

(1) On trouvera les théorèmes sur lesquels nous nous appuyons ici, démontrés sans recours aux notions métriques, dans les cours de géométrie projective de MM. Enriques (Bologne, 1909), Severi (Florence, 1926) et dans le nôtre (Liége, 1927).

Supposons que ω soit hyperbolique et soient M, M$'$ ses points unis, formant un couple de I. Soit J l'involution hyperbolique ayant pour points doubles M, M$'$. Les involutions I, J ont en commun un couple de points A, A$'$. Soient A_1, A'_1 les points que ω fait correspondre respectivement à A, A$'$ et supposons le couple A_1, A'_1 distinct du couple A,A$'$. Puisque I et ω sont permutables, A_1A_1 est un couple de I. D'autre part, le quaterne (MM$'$AA$'$) est harmonique et ω lui fait correspondre un quaterne (MM$'A_1A'_1$) qui est également harmonique. Mais alors, $A_1A'_1$ est un couple de J et les involutions I, J, ayant deux couples AA$'$, $A_1A'_1$ communs, coïncident, ce qui est absurde. Il en résulte que A_1 doit coïncider avec A$'$ et A'_1 avec A. L'homographie ω coïncide avec l'involution J.

Inversement, une involution hyperbolique J dont les points doubles forment un couple de I, est permutable avec I.

2. Supposons que ω soit elliptique et soit J une involution hyperbolique permutable avec I. La projectivité ω étant elliptique est directe, la projectivité J est inverse. Par suite, la projectivité ωJ est inverse. D'autre part, cette projectivité est permutable avec I et puisqu'elle est inverse, elle est hyperbolique ; c'est donc une involution J_1 dont les points doubles forment un couple de I. La projectivité ω est le produit des deux involutions hyperboliques J, J_1.

Inversement, soient J, J_1 deux involutions hyperboliques permutables avec I. Les points doubles M,M$'$ de J et les points doubles N, N$'$ de J_1 forment des couples de I. Puisque I est elliptique, les couples M, M$'$ et N, N$'$ se séparent ; les involutions J, J_1 n'ont donc aucun couple commun et le produit JJ_1 est donc une projectivité elliptique. Celle-ci étant le produit de deux projectivités permutables avec I, est aussi permutable avec I.

Sur une ponctuelle, les projectivités permutables avec une involution elliptique sont :

1° *Les involutions hyperboliques ayant pour points doubles, les points d'un couple de l'involution elliptique ;*

2° *Les projectivités elliptiques obtenues en faisant les produits deux à deux de ces involutions hyperboliques.*

3. Soient, dans un plan, Θ une polarité uniforme (c'est-à-dire telle qu'aucun point réel n'appartienne à sa polaire), Ω une homographie transformant Θ en elle-même. En d'autres termes, si P est le pôle d'une droite p par rapport à Θ, Ω fait correspondre à ces éléments un point P$'$ et une droite p' polaire de P$'$ par rapport à Θ.

Si U est un point uni de Ω, u sa polaire par rapport à Θ, cette droite est une droite unie de Ω. Sur la droite u, Θ détermine une involution elliptique I et Ω une projectivité ω qui doit être permutable avec I. Par suite ω est l'identité, ou une involution hyperbolique, ou une projectivité elliptique.

Supposons en premier lieu que ω soit l'identité. Ω est une homologie de centre U et d'axe u ; cette homologie est générale puisque, Θ étant uniforme, U ne peut appartenir à u. Sur une droite p passant par U, unie pour Ω, Θ détermine une involution elliptique et Ω une projectivité hyperbolique ayant comme points unis U et up. Cette projectivité et cette involution elliptique doivent être permutables, donc la projectivité est une involution hyperbolique et Ω est une homologie harmonique. Inversement, une homologie harmonique dont l'axe est la polaire du centre par rapport à Θ transforme cette polarité en elle-même.

Supposons en second lieu que ω soit une involution hyperbolique ; ses points doubles M, N forment un couple de I. Les droites UM, UN sont unies pour Ω et sont les polaires de N, M par rapport à Θ. Ω ne peut déterminer l'identité sur les deux droites UM, UN sans se réduire elle-même à l'identité. Si Ω détermine l'identité sur une de ces droites, par exemple sur UN, c'est une homologie harmonique de centre M et d'axe UN. Ce cas ne diffère pas de celui qui a été rencontré plus haut. Dans le cas où Ω ne détermine l'identité sur aucune des droites UM, UN, elle engendre sur ces droites des involutions hyperboliques dont les points doubles sont respectivement U, M et U, N. Soit alors Ω_1 l'homologie harmonique de centre U et d'axe u. L'homographie $\Omega\Omega_1$ détermine l'identité sur les droites UM, UN et est donc identique. Il en résulte que Ω coïncide avec l'homologie harmonique Ω_1^{-1}, ce qui est impossible. Par suite, Ω est une homologie harmonique.

Supposons enfin que ω soit elliptique. Ω est alors une homographie non homologique ayant pour seuls éléments unis U et u. Cette homographie peut se construire de la manière suivante : Soit Ω_1 une homologie harmonique dont le centre A appartient à u et dont l'axe a est la polaire de A par rapport à Θ. L'homographie $\Omega_1\Omega$ transforme Θ en elle-même et détermine, sur u, une involution hyperbolique permutable avec I ; $\Omega_1\Omega$ est donc une homologie harmonique dont le centre appartient à u et dont l'axe, polaire du centre par rapport à Θ, passe par U. Inversement, le produit de deux homologies harmoniques dont les axes sont les polaires des centres par rapport à Θ, est une homographie Ω, transformant Θ en elle-même, déterminant sur la droite qui joint les centres des homologies, une projectivité elliptique, sauf si le centre d'une homologie appartient à l'axe de l'autre (Dans ce cas, Ω est une homologie harmonique).

Les homographies planes transformant en elle-même une polarité uniforme sont :

1° *Les homologies harmoniques dont l'axe est la polaire du centre par rapport à la polarité ;*

2° *Les homographies non homologiques n'ayant qu'un point et une droite unis, produits des homologies précédentes deux-à-deux.*

4. Reprenons l'homographie Ω donnant, sur u, la projectivité elliptique ω. Soient a, a' deux droites homologues passant par U ; les pôles A, A' de ces droites appartiennent à u. Si P est un point de a, P' son homologue sur a', les ponctuelles a, a' étant perspectives, la droite PP' passe par un point fixe A_1 de u. Si Q est le conjugué de P sur a par rapport à Θ, Q' celui de P' sur a', Ω fait correspondre Q' à Q et la droite QQ' passe par A_1.

Ω fait correspondre à la polaire $p = AQ$ de P la polaire $p' = A'Q'$ de P'. Le point $P_1 = pp'$ est le pôle de la droite PP'. Le point A' correspondant à A dans Ω, lorsque P décrit a, P_1 décrit une droite a_1 passant par U et coupant u en un point A'_1.

En appliquant le théorème de DESARGUES au quadrangle complet UQP_1Q' et à la sécante u, on a

$$AA'A_1A'_1 \overline{\wedge} B'BA'_1A_1,$$

B, B' étant les points où a, a' coupent u. D'autre part, l'involution I donne

$$AA'A_1A'_1 \wedge BB'A'_1A_1,$$

car a_1 est la polaire de A_1 par rapport à Θ.

On en conclut

$$B'BA'_1A_1 \overline{\wedge} BB'A'_1A_1,$$

Par suite le quaterne (A_1A_1BB') est harmonique.

5. Les résultats précédents se transportent par dualité dans la gerbe.

Cela étant, soit S un point à distance finie. Considérons, dans la gerbe de sommet S, une égalité Ω, c'est-à-dire une homographie transformant en elle-même la polarité absolue Θ. D'après ce qu'on vient de voir, Ω est une homologie harmonique ou une homographie n'ayant qu'une droite et un plan unis.

Supposons en premier lieu que Ω soit une homologie harmonique ; son plan σ est perpendiculaire à son axe s, puisque ces éléments se correspondent dans Θ. Soient p, p' deux rayons homologues (passant par S). Le plan pp' passe par s et coupe σ suivant une droite p_1. Le quaterne (sp_1pp') est harmonique ; par suite p, p' sont symétriques par rapport à σ et à s. Ω est une symétrie par rapport à σ et à s, c'est-à-dire une rotation d'amplitude π autour de s.

Supposons maintenant que Ω soit non homologique. Soient s la droite unie de Ω ; σ le plan uni, perpendiculaire à s ; p, p' deux rayons homologues ; b, b' les intersections de σ avec les plans $\alpha = sa$, $\alpha' = sa'$; a_1 l'intersection des plans pp' et σ ; α'_1 le conjugué harmonique du plan $\alpha_1 = sa_1$ par rapport à α, α'. Le plan α'_1 doit être le plan polaire de a_1 par rapport à Θ, donc a_1 et α_1 sont perpendiculaires ; par suite, α_1 est le bissecteur de l'angle des plans α, α'. Le plan pp' est perpendiculaire à α'_1, puisqu'il passe par a_1. Il en résulte que les angles formés par p, p' avec le plan α'_1 sont égaux ; il en est de même des angles formés par p, p' avec s. Ω est donc une rotation autour de s.

Dans une gerbe dont le sommet est à distance finie, les égalités sont des rotations.