SUR LE THÉORÊME DE DESARGUES ET STURM,

par M. LUCIEN GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

Le théorème de DESARGUES et STURM peut s'énoncer de la manière suivante : *Les coniques d'un faisceau découpent une involution sur une droite ne passant pas aucun des points communs à toutes les coniques du faisceau.* Dans les cours de géométrie projective où cette science est exposée sans recours aux notions métriques, le théorème de DESARGUES et STURM est généralement démontré dans les cas où les coniques du faisceau passent par quatre points (réels) fixes, ou par trois points fixes en ayant une tangente fixe en un de ces points (1). Nous nous proposons d'établir ce théorème dans trois autres cas, en nous plaçant au même point de vue. Dans les démonstrations qui vont suivre, tous les éléments utilisés sont réels et peuvent être dessinés.

1. Soient A, B deux points ; p une droite ne passant ni par A, ni par B ; I_p une involution elliptique donnée sur p ; s une droite ne passant ni par A, ni par B et distincte de p. Par un point du plan passe une seule conique Γ passant par A, B et donnant sur p l'involution I_p comme involution des points conjugués. Nous dirons que les coniques Γ passant par A, B et donnant sur p comme involution des points conjugués, l'involution I_p, forment un faisceau $|\Gamma|$ (On peut dire que les coniques Γ passent par les points doubles de l'involution I_p, ces points étant imaginaires conjugués). Nous allons démontrer que les coniques Γ découpent sur s les couples de points d'une involution.

Désignons par C le point de rencontre des droites AB, p ; par S le point de rencontre de p et s ; par C′, S′ les conjugués respectifs de C, S dans I_p sur p ; par C_1 le conjugué harmonique de C par rapport à AB ; par L un point quelconque de s ; par D le point de rencontre de LB et de p ; par D′ le conjugué de D dans l'involution I_p ; enfin par D_1 le conjugué harmonique de D par rapport à BL.

Le pôle P de p par rapport à une conique Γ du faisceau appartient à la droite C_1C'. Le pôle P de p par rapport à la conique Γ passant par le point L appartient à D_1D'.

---

(1) Voir par exemple ENRIQUES, *Lezioni di geometria proiettiva* (Bologne, 1909) ; SEVERI, *Geometria proiettiva* (Florence, 1926) ; L. GODEAUX, *Cours de géométrie projective* (Liége; 1927).

Au sujet de la démonstration du théorème de Desargues et Sturm, où l'on se place à un autre point de vue, nous renvoyons le lecteur à l'article de M. MINEUR paru dans *Mathesis*, 1929, pp. 157-165, 245-259, 319-322, et au *Cours de géométrie projective* du même auteur (Bruxelles, Van Dyl).

Lorsque L varie sur s, le point D_1 décrit une droite s' passant par S. Les ponctuelles (D_1) de support s' et (D) de support p sont perspectives ; les ponctuelles (D), (D') de support p sont projectives, donc les ponctuelles (D_1), (D') sont projectives. Ces ponctuelles ne sont pas perspectives, car si D_1 coïncide avec S, D coïncide avec S et D' avec S'. Si D' coïncide avec S, D_1 est l'intersection H de s' et de BS'. La droite D_1D' enveloppe une conique Δ tangente à p en S' et à s' en H.

Soit L' le second point de rencontre de s et de la conique Γ passant par L. Par la construction précédente, il correspond à L' la seconde tangente menée à Δ par le pôle P de p par rapport à la conique Γ envisagée.

Les ponctuelles (L), de support s et (D_1), de support s', sont perspectives ; la ponctuelle (D_1) et le système des tangentes à Δ sont projectifs ; donc ce système de tangentes et la ponctuelle (L) sont projectifs. Les couples de tangentes à Δ menées par les points P de la droite C_1C' forment une involution. Donc les couples de points L, L' forment une involution sur s, transformée de la précédente par la projectivité entre les points L et le système des tangentes à Δ. Le théorème de DESARGUES et STURM est donc démontré.

Le point S et le point de rencontre de s et AB forment d'ailleurs un couple de l'involution.

Remarque. — La démonstration précédente subsiste lorsque l'involution I_p est hyperbolique ; on retrouve alors le théorème de DESARGUES et STURM dans le cas des coniques passant par quatre points réels et distincts.

2. Par un point du plan passe une seule conique passant par B, y ayant une tangente déterminée b et donnant sur p, l'involution I_p comme involution des points conjugués. Ces coniques découpent sur s des couples de points formant une involution. Pour le démontrer, il suffit de modifier la démonstration précédente en prenant pour C le point de rencontre des droites b et p. Le point C_1 coïncidera alors avec B.

3. Soient maintenant p, q deux droites, I_p et I_q deux involutions elliptiques données sur p, q. Par un point du plan passe une conique Γ donnant sur p, q, comme involutions des points conjugués, respectivement I_p, I_q. Les coniques Γ forment donc un faisceau $|\Gamma|$.

Désignons par R le point de rencontre de p, q ; par R_p le conjugué de R dans I_p ; par R_q celui de R dans I_q ; par r la droite R_pR_q. La droite r est la polaire de R par rapport à toutes les coniques du faisceau $|\Gamma|$.

Par un point A de r, menons une droite a ; les conjugués des points

ap dans I_p et aq dans I_q déterminent une droite a'. Les ponctuelles $(a'p)$, $(a'q)$ sont projectives, car elles sont respectivement projectives aux ponctuelles (ap), (aq) et celles-ci sont perspectives. Lorsque a coïncide avec r, les points $a'p$, $a'q$ coïncident avec R, donc les ponctuelles $(a'p)$, $(a'q)$ sont perspectives et la droite a' passe par un point fixe A′. Lorsque a passe par R, les points $a'p$, $a'q$ coïncident respectivement avec R_p, R_q, donc A′ appartient à r. Les droites a, a' engendrent deux faisceaux (a), (a') projectifs mais non perspectifs et par suite le point aa' décrit une conique passant par A, A′ et touchant en ces points respectivement les droites AR, A′R. Si H est un point de cette conique, les droites AH, A′H coupent p, q suivant des couples de I_p, I_q respectivement. Les points de chacun de ces couples sont donc conjugués par rapport à cette conique et celle-ci est par suite la conique du faisceau $|\Gamma|$ passant par A. Dans la construction précédente, on peut intervertir les points A, A′, donc les coniques Γ découpent sur r les couples d'une involution I.

Considérons une droite s ne passant par aucun des points R, R_p, R_q et soient P′ le conjugué du point $P = sp$ dans I_p, Q′ celui du point $Q = sq$ dans I_q, s′ la droite P′Q′. Soient S, S′, S_1 les points de rencontre respectifs des droites r et s, r et s', s et s'. Si l'on considère une conique Γ du faisceau coupant s en L, L′ et r en A, A′, les droites AP′ et A′P, AQ et A′Q′ se coupent en des points U, V de Γ et on a

$$A(UVLL') \barwedge A'(UVLL').$$

En désignant par M, M′ les points où AU, A′V coupent s, on a

$$MQLL' \barwedge PM'LL'.$$

Mais on a d'autre part

$$PM'LL' \barwedge M'PL'L,$$

d'où

$$MQLL' \barwedge M'PL'L.$$

Il en résulte que les points M et M′, P et P′, L et L′ forment trois couples d'une involution J.

Lorsque la conique Γ varie dans le faisceau $|\Gamma|$, les ponctuelles (A), (M) sont perspectives ; les ponctuelles (A′), (M′) également ; les ponctuelles (A), (A′) sont projectives, donc les ponctuelles (M), (M′) sont projectives.

Observons que les points S, S_1 forment un couple de l'involution I sur la droite r. Soit Γ_1 la conique du faisceau passant par S, S_1 ; elle coupe s en S, S′. Si A coïncide avec S, A′ avec S_1, M coïncide avec

S et M′ avec S′. Si A coïncide avec S_1, A′ avec S, M coïncide avec S′ et M′ avec S. Les points S, S′ se correspondent donc doublement dans la projectivité entre les ponctuelles (M), (M′) et par suite cette projectivité est une involution J′.

Soient maintenant B le point de rencontre des droites PQ′, P′Q ; C, C′ les points où ces droites rencontrent respectivement *r*. La conique Γ passant par B passe par C, C′ et ces points forment un couple de l'involution I. Lorsque A coïncide avec X, et A′ avec C, M coïncide avec Q et M′ avec P, donc l'involution J′ contient le couple PQ.

Considérons maintenant l'involution J relative à une conique quelconque Γ du faisceau. Elle comprend deux couples de points M, M′ et P, Q qui appartiennent à l'involution J′, donc ces involutions coïncident. Les couples de points L, L′ découpés sur *s* par les coniques du faisceau |Γ| appartiennent donc à une involution et le théorème de Desargues et Sturm est démontré dans ce cas.