SUR LES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES INVOLUTIVES DU CINQUIÈME ORDRE,

par M. LUCIEN GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

On sait qu'il existe une transformation birationnelle du plan faisant correspondre aux droites des courbes du cinquième ordre ayant six points doubles. Si cette transformation est involutive, deux cas peuvent se présenter ; ils ont été déterminés par M. BERTINI (1) et étudiés récemment par M. BYDZOVSKY (2). Ces deux cas peuvent être étudiés en utilisant la représentation plane de la surface cubique ; ce sera l'objet de cette note. On ne doit pas y chercher des propriétés nouvelles, mais plutôt un exercice destiné aux élèves d'un cours de géométrie supérieure.

1. Soient, dans un plan ϖ, six points distincts A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 non situés sur une conique et dont trois ne sont jamais en ligne droite. Les courbes C_5 du cinquième ordre, passant doublement par ces six points, sont rationnelles, en nombre ∞^2 et deux de ces courbes se coupent encore en un point en dehors des points doubles ; elles forment donc un réseau homaloïdal $|C_5|$. Si l'on établit une projectivité entre les droites du plan ϖ et les courbes du réseau $|C_5|$, on obtient une transformation birationnelle T. Supposons que cette transformation T soit involutive ($T^2 = 1$).

La transformation T possède six points fondamentaux, les points A, et six courbes fondamentales qui sont les coniques passant par cinq des points A. Nous désignerons par β_i la conique passant par les points fondamentaux, sauf A_i. Aux points infiniment voisins de l'un des points A correspondent les points de l'une des coniques β. A une droite passant par un des points A correspond une quintique C_5

(1) BERTINI, *Sopra alcuni involuzioni piane* (Rend. R. Ist. Lombardo, 1883).

(2) BYDUOVSKY. *Sur les involutions symétriques du cinquième ordre* (Bull. de l'Académie tchèque, t. 38). *Sur une espèce particulière de groupes d'involutions planes de Cremona*, (Soc. des Sciences de Bohême, 1929).

formée de la conique correspondant à ce point A et d'une cubique ayant un point double en celui des points A qui n'appartient pas à la conique.

Considérons une cubique plane C_3 passant par les six points A. La transformation T lui fait correspondre une courbe d'ordre quinze formée des six coniques fondamentales et d'une cubique C_3 passant par les six points A, et distincte ou non de la première.

Cela étant, soit F une surface cubique représentable point par point sur le plan ϖ, de telle sorte qu'aux sections planes de F correspondent les cubiques C_3 passant par les six points A. Une telle surface se construit en établissant une projectivité entre ces courbes C_3 et les plans de l'espace.

A la transformation T correspond une transformation birationnelle T′ de la surface F en elle-même. Cette transformation T′ fait correspondre à une section plane de F une section plane de cette surface ; de plus, comme à un faisceau de cubiques C_3, T fait correspondre un faisceau de cubiques C_3, aux sections de F par les plans d'un faisceau T′ fait correspondre les sections de F par les plans d'un faisceau. Par suite, T′ est déterminée sur F par une homographie H. La transformation T′ est involutive, donc l'homographie H est involutive ; c'est donc une homologie harmonique ou une homographie biaxiale harmonique.

2. Envisageons en premier lieu le cas où l'homographie H est une homologie harmonique de centre A′ et de plan α'. La surface F est dépourvue de points multiples, puisque les six points A sont distincts et qu'ils n'appartiennent pas à une conique, ni trois d'entre eux à une droite. Le point A′ appartient nécessairement à la surface F et nous désignerons par A_0 le point qui lui correspond dans le plan ϖ.

Aux points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ correspondent, sur F, six droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$ deux-à-deux gauches. Aux coniques $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_6$ correspondent six droites de F que nous désignerons par $b_1, b_2, \ldots, b_6$. Ces droites ne se rencontrent pas deux-à-deux et la droite b_i s'appuie sur les droites a, sauf sur a_i.

Aux points $A_1, A_2, \ldots, A_6$, T fait correspondre, dans un certain ordre, les coniques $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_6$; par suite, l'homologie H fait correspondre aux droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$, les droites $b_1, b_2, \ldots, b_6$, dans un certain ordre. Il en résulte qu'aucune des droites a, b, ne peut être unie pour H, c'est-à-dire passer par A′ ou appartenir à α'. De plus, comme deux droites homologues par rapport à H se coupent dans α', à la droite a_i, H ne peut faire correspondre b_i. Par suite, au point A_i, T ne peut faire correspondre la conique β_i (qui ne passe pas par A_i).

Soit b_2 la droite que H fait correspondre à a_1. Le point a_1b_2 appartient un plan α' et le plan a_1b_2 passe par le point A′. Ce plan coupe la surface F suivant une droite d_{12} passant par A′ et qui est unie pour H. La droite a_2 ne peut rencontrer ni a_1, ni b_2, donc elle rencontre d_{12}. Il en est de même de la droite b_1. Par suite, le plan a_2b_1 passe par A′ et est uni ; il en résulte que H fait correspondre la droite b_1 à la droite a_2.

Soient de même b_4, b_6 les droites que H fait correspondre respectivement à a_3, a_5. Alors H fait correspondre b_3 à a_4 et b_5 à a_6. Les plans a_3b_4 et a_4b_3 se coupent suivant une droite d_{34}, les plans a_5b_6 et a_6b_5 suivant une droite d_{56} ces deux droites passent par A′. Ces droites appartiennent de plus à F.

3. A la droite d_{12}, appartenant à F et s'appuyant sur a_1, a_2, correspond dans le plan ϖ la droite A_1A_2 et cette droite passe par A_0. De même, aux droites d_{35}, d_{56} correspondent dans ϖ les droites A_3A_5, A_5A_6 passant toutes deux par A_0. Les six points fondamentaux de la transformation T ne peuvent donc être choisis arbitrairement, ils se distribuent par couples sur trois droites concourantes.

Aux sections de F par les plans passant par A′ correspondent dans le plan ϖ les cubiques planes C_3 passant par les sept points A_0, A_1..., A_6. Deux de ces courbes ont encore en commun deux points formant un couple de l'involution engendrée par T, car les plans passant par A′ sont unis pour H et par suite les cubiques C_3 envisagées sont unies pour la transformation T. Celle-ci est donc un cas particulier d'une transformation connue.

On peut préciser en observant que le plan tangent à la surface F en A′ coupe cette surface suivant les droites d_{12}, d_{34}, d_{56}. Par suite, une section de F par un plan passant par A′ a un point d'inflexion en ce point. Il en résulte que les cubiques C_3 passant par A_0 y ont un point d'inflexion.

4. Les points unis de H appartenant à F sont le point A′ et la section de F par le plan α'. Au point A′ correspond dans ϖ le point A_0 qui est donc uni pour la transformation T. Cela résulte d'ailleurs du fait qui vient d'être établi : les cubiques C_3 ayant même tangente en A_0 y ont un contact du second ordre.

A la section de F par le plan α' correspond dans le plan ϖ une cubique plane C'_3 passant par les points A_1, A_2,... A_6, mais non par A_0, et dont tous les points sont unis pour la transformation T.

Aux points infiniment voisins de A_1 correspondent, par T, les points de la conique β_2, passant par A_1, A_2, ..., A_6. D'autre part, aux points infiniment voisins de A_1 correspondent, sur F, les points de la droite

a_1. Or, le point $a_1 b_2$ appartient au plan α' dont le point infiniment voisin de A_1 sur la conique β_2 appartient à C_3. En d'autres termes, la cubique C'_3 touche la conique β_2 en A_1.

On en conclut que la cubique C'_3 est tangente en $A_1, A_2, \ldots, A$ respectivement aux coniques $\beta_2, \beta_1, \beta_4, \beta_3, \beta_6, \beta_5$.

5. Les quadriques unies par l'homologie harmonique H forment deux systèmes linéaires : l'un, ∞^2, est formé des quadriques dégénérées en le plan α' et en un plan passant par A'. L'autre, ∞^6, est formé de quadriques généralement irréductibles et comprend les ∞^5 cônes de sommet A'. Le second seul nous intéresse.

A la section de F par une quadrique correspond sur le plan ϖ une courbe C_6 du sixième ordre ayant des points doubles en $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Par suite, il existe un système linéaire $| C_6 |$, de dimension six, formé de sextiques unies pour la transformation T, ayant des points doubles en $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Celles de ces sextiques qui passent par A_0 ont un point double en ce point, les tangentes à ces courbes en ce point étant inflexionnelles.

6. Examinons maintenant le cas où H est une homographie biaxiale harmonique et désignons par d, d' les axes de cette homographie. L'un de ces axes, soit d, appartient nécessairement à la surface F. L'autre, d', ne peut appartenir à F et nous nous placerons dans le cas général, où d' coupe F en trois points distincts D'_1, D'_2, D'_3.

Appelons encore $a_1, a_2, \ldots, a_6$ les droites de F qui correspondent aux points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ et $b_1, b_2, \ldots, b_6$ celles qui correspondent aux coniques $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_6$. Comme T fait correspondre à un point A une conique β, H fait correspondre à une droite a une droite b et par suite la droite d ne peut être ni une droite a, ni une droite b. Il en résulte que d correspond à une droite de ϖ joignant deux des points A, par exemple A_5, A_6. Dans ces conditions les droites a_5, a_6 s'appuient sur d. Les autres droites a ne peuvent s'appuyer sur d puisque, par hypothèse, trois des points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ ne peuvent être en ligne droite.

Le plan tangent δ'_1 à F au point D'_1 est uni pour l'homographie H, il passe donc par d ou par d'. Si le plan δ'_1 passait par d', cette droite rencontrerait F en quatre points (dont deux réunis en D'_1) et appartiendrait à cette surface, ce qui est impossible. Le plan δ'_1 passe donc par d et coupe la surface F suivant cette droite et suivant deux droites d_{11}, d_{12} passant par D'_1. De même le plan δ'_2 tangent à F en D'_2 coupe F suivant trois droites d_1, d_{21}, d_{22} et le plan δ'_3 tangent à F en D'_3 coupe cette surface suivant les droites d, d_{31}, d_{32}.

La droite a_1 ne peut s'appuyer sur d ; elle ne peut non plus s'appuyer sur d', car ce serait une des six droites $d_{11} \ldots, d_{32}$ que l'on vient de rencontrer et elle s'appuyerait sur d. A a_1, H fait correspondre une droite b ne rencontrant pas a_1, c'est-à-dire la droite b_1. De même, à a_2, a_3, a_4, H fait correspondre respectivement les droites b_2, b_3, b_4.

A la droite a_5, H fait correspondre une des droites b_5, b_6 ; cette droite correspondante doit passer par le point uni a_5d, c'est donc la droite b_6, puisque b_5 ne rencontre pas a_5. De même, à la droite a_6, H fait correspondre la droite b_5, coupant a_6 au point où cette droite s'appuie sur d.

Aux sections de F par les plans passant par d correspondent dans ϖ des cubiques C_3 formées de la droite A_5A_6 (qui correspond à d) et des coniques C_2 passant par A_1, A_2, A_3, A_4. En particulier, aux sections de F par les plans δ'_1, δ'_2, δ'_3 correspondent dans ϖ les coniques dégénérées du faisceau $| C_2 |$, Par suite, aux droites d_{11}, $d_{12}, \dots$, d_{32} correspondent les côtés du quadrangle complet de sommets A_1, A_2, A_3, A_4 et aux points D'_1, D'_2, D'_3 correspondent les points diagonaux de ce quadrangle.

Il résulte de ce qui précède que les droites a_5, a_6, b_5, b_6 ne peuvent coïncider avec des droites d_{11}, d_{12}, ..., d_{32}. Par suite, les plans unis a_5b_6, a_6b_5 ne peuvent passer par d' et passent par d. A la section de F par le premier de ces plans correspond la cubique C_3 formée de la droite A_5A_6 et de la conique β_6 ; à la section de F par le second de ces plans correspond la cubique C_3 formée de la droite A_5A_6 et de la conique β_5. Les coniques β_5, β_6 appartiennent d'ailleurs au faisceau $| C_2 |$.

7. Dans le plan ϖ, aux points fondamentaux A_1, A_2, A_3, A_4 de la transformation T correspondent respectivement les coniques fondamentales β_1, β_2, β_3, β_4 ne contenant pas le point fondamental correspondant. Aux points fondamentaux A_5, A_6 correspondent respectivement les coniques fondamentales β_6, β_5, passant par le point fondamental correspondant.

Au point infiniment voisin de A_5 sur la conique β_6 correspond sur F le point a_5b_6 qui appartient également à la droite d ; celle-ci correspond à la droite A_5A_6. Par suite, la conique β_6 est tangente à la droite A_5A_6 en A_5. De même, la conique β_5 est tangente à la droite A_5A_6 au point A_6.

Les points du plan ϖ unis pour la transformation T correspondent aux points de la surface F, unis pour l'homographie H. Ce sont donc les points de la droite $A_5 A_6$ et les trois points diagonaux du quadrangle $A_1A_2A_3A_4$.

8. Les quadriques unies pour l'homographie biaxiale harmonique H forment deux systèmes linéaires : l'un ∞^3, est formé de quadriques passant par les axes d, d' de H. L'autre, ∞^5, est formé de quadriques ne passant pas par ces axes.

Les quadriques du premier système découpent sur F des courbes du cinquième ordre s'appuyant en trois points sur d et passant par les points D'_1, D'_2, D'_3. Il leur correspond sur ϖ des courbes du cinquième ordre passant doublement par les points A_1, A_2, A_3, A_4 simplement par les points diagonaux du quadrangle complet formé par ces points, et simplement par les points A_5, A_6. Ces courbes sont unies pour la transformation T.

Les quadriques du second système découpent sur F des sextiques auxquelles correspondent, sur F, des courbes du sixième ordre C_6, unies pour T, passant doublement par les six points A_1, A_2, ..., A_6.

9. Aux sections de la surface F par les plans passant par d' correspondent dans le plan ϖ des cubiques planes C'_3 passant par les points A_1, A_2, ..., A_5, A_6 et par les points diagonaux du quadrangle complet formé par ces points. Ces cubiques sont unies pour la transformation T. Les coniques C_2 sont également unies pour T et chacune d'elles coupe une courbe C'_3 en deux points variables qui forment un couple de l'involution engendrée par T.

On obtient ainsi une génération simple de la transformation T.