ENRIQUES (FEDERIGO). — LEZIONI SULLA TEORIA GEOMETRICA DELLE EQUAZIONI E DELLE FUNZIONI, publicate per cura del Dott. Oscar Chisini. Vol. III, 1 vol. in-8° de 593 pages. Bologne, Nicola Zanichelli, 1924 (65 lires).

Ce volume termine l'Ouvrage que MM. Enriques et Chisini s'étaient proposé d'écrire sur les fonctions algébriques d'une variable indépendante, en se plaçant au point de vue géométrique (¹). Il contient l'exposé de la « Géométrie sur une courbe algébrique ».

La géométrie sur une courbe algébrique a pris naissance, d'une part dans les travaux des géomètres qui voulurent étudier les intersections des courbes algébriques planes, d'autre part dans les recherches des analystes qui, à la suite d'Abel et de Riemann, se proposèrent l'étude des intégrales de fonctions rationnelles attachées à une courbe algébrique, c'est-à-dire des intégrales abéliennes. Le développement de la théorie s'est naturellement ressenti de cette double origine et bien peu nombreux d'ailleurs sont les géomètres modernes qui n'ont abordé ce genre d'étude qu'en se plaçant au seul point de vue géométrique, ou au seul point de vue de la théorie des fonctions. Sans doute, comme le titre de l'ouvrage l'indique, c'est au point de vue géométrique que MM. Enriques et Chisini ont étudié la question, mais chaque fois que cela devait être fait, ils ont eu soin de signaler les contacts de leurs développements avec la théorie des fonctions.

Le volume débute par l'étude des série linéaires de groupes de points sur une courbe algébrique. Après avoir défini les opérations somme et soustraction des séries linéaires, les auteurs introduisent la série canonique par la considération de la série jacobienne d'une série linéaire. Ce procédé, dû à M. Enriques, présente un double avantage : d'une part, il met en évidence l'invariance de la série canonique vis-à-vis des transformations birationnelles; d'autre part, il est susceptible d'extension immédiate aux surfaces et aux variétés. Comme généralisation de ce procédé, les auteurs

(¹) Nous avons rendu compte des deux premiers volumes dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1916, p. 183-186 et 1919, p. 10-12.

obtiennent la liaison fonctionnelle entre les groupes des points r-uples d'une série linéaire de dimension $r - 1$, et la série canonique. Signalons également la manière dont est établie la formule donnant le nombre de groupe de $r + 1$ points communs à une g_n^r et à une g_m^1. Viennent ensuite les théorèmes de Riemann-Roch et de Clifford, etc., puis l'étude des courbes canoniques. Les auteurs établissent ce théorème, dû à M. Enriques : « Une courbe de genre $p > 4$, non hyperelliptique, a comme courbe canonique une courbe d'ordre $2p - 2$, de l'espace à $p - 1$ dimensions, appartenant aux hyperquadriques d'un système de dimension $\frac{1}{2}(p-1)(p+2) - 3(p-1)$. En général, cette courbe est la base de ce système. Il y a exception si la courbe possède une série g_3^1, auquel cas elle se trouve sur une surface réglée rationnelle d'ordre $p - 2$ commune à toutes les quadriques, ou si $p - 6$ et si la courbe possède une série g_5^2; elle se trouve alors sur la surface de Véronèse commune à toutes les quadriques. »

Le Chapitre se termine par une étude approfondie des séries spéciales. Signalons, en divers endroits, le parallèle entre le point de vue géométrique des séries linéaires et celui des fonctions appartenant à une surface de Riemann.

Dans l'exposé de la géométrie sur une courbe algébrique fait dans le premier Chapitre, la courbe est en général considérée en elle-même, et cet exposé conviendrait tout aussi bien, par exemple, à une surface réglée à condition d'appeler points les génératrices de cette surface. Historiquement, le premier exposé systématique de la géométrie sur une courbe, fait par Brill et Noether, prend comme « modèle projectif » de la courbe, une courbe plane. Au début du Chapitre II, MM. Enriques et Chisini exposent les considérations de Brill et Noether (courbes adjointes); ils indiquent également en quoi consiste le mode d'exposition de la théorie donné tout récemment par M. Severi, et basé sur la définition du genre (rang) dûe à Weierstrass. Un exposé du développement historique de la géométrie sur une courbe, très complet, montre comment on est passé du concept de la géométrie projective au concept de la géométrie des transformations birationnelles. Ceci conduit les auteurs à un exposé de la théorie de ces dernières transformations dans le plan.

Le Chapitre III est consacré à l'étude des transformations des courbes algébriques. Les transformations birationnelles des courbes rationnelles et elliptiques en elles-mêmss sont étudiées en détail ; on trouve dans la centaine de pages consacrées à ces questions, non seulement un exposé complet des résultats connus, mais encore de nombreux résultats nouveaux. Les auteurs donnent ensuite, après quelques indications sur les transformations des courbes de genre $p > 1$, un exposé complet de la théorie des transformations d'une courbe de genre trois en elle-même.

On sait que deux courbes algébriques dont les genres sont égaux ne sont pas nécessairement birationnellement identiques ; pour qu'il en soit ainsi, il faut de plus que certaines constantes caractéristiques, les modules, soient égales pour les deux courbes. Les auteurs montrent qu'une courbe de genre p dépend de non hyperelliptique $3p - 3 + \rho$ modules, avec $\rho = 3$ pour $p = 0$, $\rho = 1$ pour $p = 1$, $\rho = 0$ pour $p > 1$. Les courbes de même genre et de mêmes modules forment une classe et à une surface de Riemann quelconque, à n feuillets, correspond toujours une classe de courbes algébriques ; c'est le théorème d'existence. Les considérations sur le compte des modules et sur les systèmes continus de courbes planes ont fourni à M. Chisini un nouveau mode d'exposition de la géométrie sur une courbe algébrique. Signalons également l'étude des variations topologiques des surfaces de Riemann lorsque les courbes correspondantes acquièrent de nouveaux points doubles, question d'une importance capitale pour la théorie des surfaces algébriques.

Comme généralisation de l'étude des correspondances birationtionnelles entre deux courbes algébriques, on peut considérer les correspondances à indices finis. On sait que, dans cet ordre d'idées, de très beaux résultats ont été obtenus par Hürwitz et par MM. Severi, Scorza, Rosati, etc. Le Chapitre IV est consacré à l'étude géométrique et topologique de ces théories. On y trouvera notamment une très intéressante interprétation topologique du théorème d'Abel, dûe à M. Chisini.

Enfin, un cinquième et dernier chapitre traite des courbes gauches algébriques.

Les lignes qui précèdent ne donnent qu'une idée fort incomplète des nombreuses questions abordées par MM. Enriques et

Chisini dans leur troisième volume. L'ouvrage de ces géomètres sera sans aucun doute consulté avec fruit par tous ceux qui voudront se documenter sur une question touchant de près ou de loin à la théorie des courbes algébriques. C'est de plus un des livres que celui qui cultive la géométrie algébrique aura toujours sous la main.

LUCIEN GODEAUX.