Bulletin de la Classe des sciences

Construction de variétés algébriques ayant une variété canonique d'ordre zéro ou privées de variété canonique

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de variétés algébriques ayant une variété canonique d'ordre zéro et de variétés algébriques privées de variété canonique comme images d'involutions appartenant à des variétés algébriques ayant une variété canonique d'ordre zéro.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Construction de variétés algébriques ayant une variété canonique d'ordre zéro ou privées de variété canonique

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction de variétés algébriques ayant une variété canonique d'ordre zéro et de variétés algébriques privées de variété canonique comme images d'involutions appartenant à des variétés algébriques ayant une variété canonique d'ordre zéro.

La représentation de l'involution engendrée dans un espace linéaire par une homographie biaxiale harmonique par une variété lieu des droites joignant les points de deux variétés de Veronese nous a permis de construire des surfaces répondant à certaines conditions [1]. Le même procédé va nous permettre de construirc dcs variétés algébriques ayant une variété canonique d'ordre zéro ou privées de variété canonique en partant d'une variété algébrique possédant une variété canonique d'ordre zéro, transformée en soi par une homographie biaxiale harmonique. Il s'agit en somme de généraliser des théorèmes connus pour les surfaces, mais les démonstrations sont différentes.

1. Soit dans un espace S_{2n+1} à $2n + 1$ dimensions, une homographie biaxiale harmonique H dont les axes sont deux espaces σ_1, σ_2 de dimensions respectives r et s.

L'intersection complète de $n + 1$ hyperquadriques Q de S_{2n+1} est une variété V_n d'ordre 2^{n+1}. On sait que les variétés canoniques de

---

(1) Voir par exemple notre note *Construction de quelques surfaces projectivement canoniques* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1970, pp. 871-885; 1972, pp. 1175-1179).

V_n sont découpées par les hypersurfaces d'ordre $2(n + 1) - (2n + 2) = 0$, c'est-à-dire que la variété V_n possède une variété canonique d'ordre zéro. Il en résulte que le système des sections hyperplanes de V_n est son propre adjoint.

Les hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H forment deux systèmes linéaires. L'un, que nous désignerons par $| Q_0 |$ est formé d'hyperquadriques ne passant pas par les deux axes σ_1, σ_2. L'autre $| Q_1 |$ est formé des hyperquadriques passant par ces deux axes.

Désignons par $y_0, y_1, \ldots, y_r$ les ordonnées des points de σ_1 et par $z_0, z_1, \ldots, z_s$ celles des points de σ_2, de telle sorte que les équations de l'homographie H soient

$$y'_i : z'_k = y_i : -z_k, \ (i = 0,1,\ldots,r; k = 0,1,\ldots,s)$$

Si l'on représente par $\varphi(y), \psi(z)$ des formes quadratiques de leurs arguments, les hyperquadriques Q_0 ont une équation de la forme

$$\varphi(y) + \psi(z) = 0$$

et les hyperquadriques Q_1 sont représentées par des équations de la forme

$$\theta(y;z) = 0,$$

où le premier membre est une forme bilinéaire en y et z.

Remarquons qu'une hyperquadrique Q_0 peut passer par un des axes de H, mais non par les deux. Dans la suite, nous supposerons toujours que les hyperquadriques Q_0 que nous considérons ne passent par aucun des axes de l'homographie H.

2. La dimension du système $| Q_0 |$ est égale à

$$R = [r^2 + s^2 + 3(r + s) + 2] : 2,$$

tandis que la dimension de Q_1 est $rs + r + s$. Rapportons projectivement les hyperquadriques Q_0 aux hyperplans d'un espace linéaire Σ à R dimensions. Il correspond aux groupes de l'involution I engendrée par H les points d'une variété W à $2n + 1 = r + s + 1$ dimensions, que nous désignerons par W_{rs}. Elle est d'ordre $2^r 2^s = 2^{2n}$.

Pour obtenir les équations de W_{rs}, posons

$$Y_{ik} = y_i y_k, \ Z_{jh} = z_j z_h.$$

Les équations de W_{rs} sont obtenues en écrivant que les déterminants

$$|Y_{ik}|, \quad |Z_{jh}|$$

sont de caractéristique un.

Les premières de ces équations représentent la variété de Veronese M situées dans un espace Σ_1 à $r(r+3):2$ dimensions et les secondes équations représentent une variété de Veronese N située dans un espace Σ_2 à $s(s+3):2$ dimensions. La variété W_{rs} est le lieu des droites joignant les points des variétés M et N. Cellcs-ci sont respectivement multiples d'ordre s et r pour la variété W_{rs}.

Aux hyperquadriques Q_1 correspondent dans Σ des hyperquadriques Q'_1 passant par les espaces Σ_1, Σ_2 et touchant la variété W_{rs} en tout point d'intersection. Ces points forment une variété à $r+s-1$ dimensions, d'ordre 2^{2n}.

3. Nous allons considérer les variétés V_n sur lesquelles l'involution I ne possède qu'un nombre fini, éventuellement nul, de points unis. Cela exige que l'on ait soit $r = s = n$, soit $r = n + 1$ et $s = n - 1$.

Dans le premier cas ($r = s = n$), la variété V_n doit être l'intersection de $n + 1$ hyperquadriques Q_0 et alors l'involution I est dépourvue de points unis, ou la variété V_n est l'intersection de n variétés hyperquadriques Q_0 et d'une hyperquadrique Q_1. Dans ce cas l'involution I possède 2^n points unis dans chacun des espaces σ_1, σ_2.

Dans le second cas ($r = n + 1$, $s = n - 1$), la variété V_n doit être l'intersection de $n + 1$ hyperquadriques Q_0 et l'involution I possède 2^{n+1} points unis dans l'espace σ_1.

Avant d'aller plus loin, rappelons un théorème que nous avons établi jadis [1]. Supposons que sur une variété algébrique V_m nous ayons une involution d'ordre deux privée de points unis. Le système canonique de V_m contient deux systèmes linéaires composés au moyen de l'involution, l'un de dimension t, l'autre de dimension $t + 1$. Au système canonique de la variété image de l'involution correspond un de ces systèmes. Si le genre géométrique de V_m est impair, c'est le système de dimension $t + 1$, si ce genre est pair, c'est le système de dimension t. La variété V_m est supposée complètement régulière, ce qui est le cas si elle est l'intersection complète de variétés algébriques.

---

[1] *Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1938, pp. 291-297).

4. Nous supposerons en premier lieu $r = s = n$. Dans cette hypothèse, l'espace Σ est à $n^2 + 3n + 1$ dimensions, les variétés M et N sont d'ordre 2^n. Nous supposerons en outre que la variété V_n est l'intersection de $n + 1$ hyperquadriques Q_0. L'involution I déterminée par H sur cette variété ne possède donc pas de points unis.

La variété Ω qui correspond sur W_{nn} à l'involution I est la section par $n + 1$ hyperplans de cette variété, c'est-à-dire la section de W_{nn} par un espace à $n(n + 2)$ dimensions, l'espace Σ ayant $n^2 + 3n + 1$ dimensions.

Nous commencerons par étudier le cas $n = 2$. Le résultat est connu, mais la démonstration utilisée est un peu différente de l'ordinaire.

La variété V_2 est une surface d'ordre huit ($p_a = P_4 = 1$) de l'espace à cinq dimensions et σ_1, σ_2 sont des plans.

Considérons dans S_5 un hyperplan η passant par σ_1. Il coupe V_2 suivant une courbe α de genre cinq, transformée en soi par H. Sur la courbe α, il existe deux séries linéaires appartenant à la série canonique (découpée par les hyperplans) et composées au moyen de I. L'une, découpée par les hyperplans passant par σ_1, a la dimension un et l'autre, découpée par les hyperplans passant par σ_2, a la dimension deux. La courbe α_0, qui correspond sur la variété Ω à la courbe α, est de genre trois d'après la formule de Zeuthen. Il en résulte que si nous désignons par β les courbes sections de V_2 par les hyperplans ζ passant par σ_2 et part β_0 les courbes qui leur correspondent sur Ω, la série canonique de la courbe α_0 est découpée par les courbes β_0. On a donc $\alpha'_0 \equiv \beta_0$. Et de même $\beta'_0 \equiv \alpha_0$. Nous pouvons donc écrire

$$|\alpha'_0| = |\beta_0|, \quad |\beta'_0| = |\alpha_0|, \quad |\alpha''_0| = |\alpha_0|, \quad |\beta''_0| = |\beta|$$

et par suite la surface Ω est dépourvue de courbe canonique et a le bigenre $P_2 = 1$, c'est-à-dire une courbe bicanonique d'ordre zéro.

Les sections de la variété W_{22} *située dans un espace* Σ *à 11 dimensions par des espaces à 8 dimensions, sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un (surfaces d'Enriques)* (1)

5. Passons maintenant au cas où n est supérieur à 2.

Considérons encore la section de V_n par un hyperplan η passant par σ_1.

(1) Voir BURNIAT, *Recherches sur les surfaces de bigenre un* (Mémoires de la Société roy. des Sciences de Liège, 1936, pp. 1-100).

Cette section est une variété α à $n - 1$ dimensions de genre géométrique $p_g = 2n + 1$, ses sections hyperplanes étant son système canonique. Dans ce système, il y a deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I. L'un est découpé par les hyperplans η passant par σ_1 et a la dimension $n - 1$. L'autre est découpé par les hyperplans ζ passant par σ_2. Le système canonique de la variété α_0 qui représente α sur Ω a pour transformé le second de ces systèmes. Il en résulte que le système canonique de α_0 est découpé par les variétés β_0 qui correspondent aux variétés β découpées sur V_n par les hyperplans passant par σ_2. On a donc

$$|\alpha'| = |\beta|, \; |\beta'| = |\alpha|, \; |\alpha^n| = |\alpha|, \; |\beta^n| = |\beta|$$

et la variété Ω est dépourvue de variété canonique mais possède une variété bicanonique d'ordre zéro.

Les sections de la variété W_{nn} *par un espace linéaire à* $n(n + 2)$ *dimensions sont des variétés privées de variété canonique mais possédant une variété bicanonique d'ordre zéro.*

6. Nous allons maintenant supposer que la variété V_n est l'intersection de n hyperquadriques Q_0 et d'une hyperquadrique Q_1, les espaces σ_1, σ_2 ayant toujours la dimension n. Comme nous l'avons vu, l'involution I possède actuellement 2^n points unis dans chacun des espaces σ_1, σ_2.

Supposons encore une fois $n = 2$. La variété V_2 est actuellement une surface d'ordre huit de S_5, à sections hyperplanes de genre cinq. L'involution I possède quatre points unis dans chacun des plans σ_1, σ_2.

Un hyperplan η passant par σ_1 coupe V_2 suivant une courbe α d'ordre huit et de genre cinq et H engendre sur cette courbe une involution ayant quatre points unis. Les courbes α_0 qui correspondent aux courbes α sont de genre deux et forment sur Ω un réseau de degré deux. Ce système est nécessairement son propre adjoint. Les hyperplans passant par σ_2 découpent sur une courbe α une série de dimension deux à laquelle correspond sur la courbe α_2 homologue une série d'ordre quatre. En considérant les courbes β découpées par les hyperplans passant par σ_2 et les courbes β_0 qui leur correspondent sur Ω, on arrive à des conclusions analogues et on a donc

$$|\alpha'| = |\alpha|, \; |\beta'| = |\beta|, \; |\alpha''| = |\alpha|, \; |\beta''| = |\beta|.$$

La surface Ω possède donc une courbe canonique et une courbe bicanonique d'ordre zéro, car $|\alpha|$ est son propre adjoint.

La surface Ω est découpée sur la variété W_{22} par une hyperquadrique Q'_1 passant par les espaces à cinq dimensions Σ_1, Σ_2 et touchant W_{22} en chaque point d'intersection, par un espace à 9 dimensions.

La variété W' *le long de laquelle la variété* W_{22} *est touchée par une hyperquadrique passant par* Σ_1, Σ_2 *est coupée par un espace à neuf dimensions suivant une surface ayant des courbes canonique et bicanonique d'ordre zéro. Cette surface a les genres* $p_a = P_4 = 1$.

7. Supposons maintenant $n = 3$. La variété V_3 appartient à un espace S_7 à sept dimensions et coupe en huit points chacun des espaces à trois dimensions σ_1 et σ_2. L'involution I possède donc 16 points unis.

Un hyperplan η passant par σ_1 coupe V_3 suivant une surface α d'ordre 16, sur laquelle l'involution I possède huit points unis. Les genres géométrique et arithmétique de α sont $p_a = p_g = 7$. Le genre arithmétique p'_a de la surface α_0 représentant α sur Ω est donné par la formule

$$12(p_a + 1) = 24(p'_a + 1) - 3.8,$$

d'où $p'_a = 4$. Les surfaces α_0 étant régulières, la dimension du système canonique d'une de ces surfaces est trois.

Sur une surface α, il y a dans le système canonique, deux systèmes composés avec l'involution I. L'un, de dimension deux, est découpé par les hyperplans η passant par σ_1, l'autre, de dimension trois, est découpé par les hyperplans ζ passant par σ_2. Il en résulte que sur une surface α_0, le système canonique est découpé par les surfaces β_0 homologues sur Ω des surfaces β. On a donc

$$|\alpha'| = |\beta|, \quad |\beta'| = |\alpha|, \quad |\alpha''| = |\alpha|, \quad |\beta''| = |\beta|$$

et par conséquent la variété Ω est dépourvue de surface canonique et possède une surface bicanonique d'ordre zéro.

La variété à cinq dimensions le long de laquelle une hyperquadrique passant par les espaces Σ_1, Σ_2 *touche la variété* W_{33} *d'un espace* Σ *à 19 dimensions, est coupée par un espace à 16 dimensions suivant une variété* Ω *à trois dimensions privée de variété canonique et ayant une variété bicanonique d'ordre zéro.*

8. Supposons $n > 3$. La variété V_n contient une involution I d'ordre deux présentant 2^n points unis dans chacun des espaces σ_1, σ_2. L'hyperquadrique Q'_1 qui correspond dans Σ à l'hyperquadrique Q_1 contenant V_n passe par Σ_1, Σ_2 et touche la variété W_{nn} suivant une variété W′ d'ordre 2^{2n}. La variété Ω est la section de W′ par un espace $n^2 + n + 1$ dimensions.

Considérons un hyperplan η passant par σ'_1 et coupant σ_2 suivant un espace σ'_2 à $n - 1$ dimensions. Considérons également un hyperplan ζ passant par σ_2 ct coupant σ_1 suivant un espace σ_1 à $n - 1$ dimensions. Nous désignerons par α les variétés sections de V_n par les espaces η et par β les variétés sections de V_n par les hyperplans ζ.

L'espace à $2n - 1$ dimensions (η,ζ) coupe V_n suivant une variété à $n - 2$ dimensions sur laquelle H engendre une involution que l'on peut toujours supposer privée de points unis par un choix convenable des hyperplans η et ζ.

Les variétés canoniques de la variété (α,β) sont découpées par les hyperquadriques de l'espace (η,ζ). Ce système canonique contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I. L'un est découpé par les hyperquadriques de l'espace (η,ζ) ne passant pas par les deux espaces σ'_1, σ'_2. Il a la dimension $n^2 - 1$. Le second est constitué par les hyperquadriques passant par les espaces σ'_1, σ'_2 et a la dimension $n^2 - 2$. Si nous appelons α_0 et β_0 les variétés qui correspondent à α et β sur la variété Ω, au système canonique de la variété (α_0,β_0) homologue de (α,β) correspond le premier des systèmes précédents et le genre de (α_0,β_0) est $p'_a = n^2$. Ce système canonique est découpé par les hyperplans de Σ.

Observons qu'à un hyperplan η passant par σ_1 correspond dans Σ un hyperplan η' passant par Σ_1. Le système canonique d'une variété α est celui de ses sections hyperplanes et contient deux systèmes composés au moyen de l'involution I: l'un, de dimension $n - 1$, est découpé par les hyperplans η passant par σ_1, l'autre, de dimension n, est découpé par les hyperplans ζ passant par σ_2. Au dernier système correspond sur Ω le système (α_0,β_0) donc le système canonique est découpé par les hyperplans, comme celui de α_0. On en conclut que $|\beta_0|$ est l'adjoint à α_0, donc

$$|\alpha'_0| = |\beta_0| \quad \text{et} \quad |\beta'_0| = |\alpha_0|,$$

d'où

$$|\alpha''_0| = |\alpha_0|, \ |\beta''_0| = |\beta_0|.$$

La variété Ω est donc dépourvue de variété canonique mais possède une variété bicanonique d'ordre zéro.

La section de la variété W′ *le long de laquelle une hyperquadrique passant par* Σ_1, Σ_2 *touche la variété* W_{nn} *de l'espace* Σ *à* $n^2 + 3n + 1$ *dimensions, par un espace à* $(n + 1)^2$ *dimensions, est une variété dépourvue de variété canonique mais possédant une variété bicanonique d'ordre zéro.*

9. Il nous reste à considérer le cas où l'homographie H possède deux axes, σ_1 de dimensions $n + 1$ et σ_2 de dimension $n - 1$. Dans ces conditions, la variété V_n est l'intersection de $n + 1$ hyperquadriques Q_0 et rencontre σ_1 en 2^{n+1} points, mais ne rencontre pas σ_2. Sur V_n, l'involution I déterminée par H possède donc 2^{n+1} points unis.

Considérons un hyperplan ζ passant par σ_2 et coupant σ_1 suivant un espace σ'_1 à n dimensions, ne passant pas par un des points unis de l'involution I. Il coupe V_n suivant une variété β dont les sections hyperplanes forment le système canonique. Celui-ci contient deux systèmes composés au moyen de l'involution: l'un, de dimension $n - 1$, est découpé par les hyperplans η passant par σ'_1, l'autre, de dimension n, est découpé par les hyperplans ζ passant par σ_2. Comme le genre arithmétique de β est $p_a = 2n + 1$, c'est le second de ces systèmes qui correspond au système canonique de la variété β_0 homologue de β sur Ω. On a donc

$$|\beta'_0| = |\beta_0|, \; |\beta''_0| = |\beta_0|, \dots$$

et la variété β_0 possède une variété canonique et des variétés pluricanoniques d'ordre zéro.

Soit α la section de la variété V_n par un hyperplan η passant par σ_1. On a nécessairement

$$|\alpha'_0| = |\alpha_0|, \; |\alpha''_0| = |\alpha_0|, \dots$$

Le système canonique de α découpé par les hyperplans de η, contient deux systèmes composés au moyen de l'involution I: l'un, de dimension $n - 2$, est découpé par les hyperplans passant par σ_1 et a pour points-base les points unis de l'involution, l'autre, de dimension $n + 1$, est découpé par les hyperplans passant par σ_2. C'est le premier de ces systèmes qui est le transformé du système canonique de α_0.

Observons qu'actuellement l'espace Σ est à $n^2 + 3n + 2$ dimensions, la variété $W_{n+1\ n-1}$ étant toujours d'ordre 2^{2n}. Les variétés M et N ont respectivement les ordres $(n^2 + 5n + 4) : 2$ et $(n^2 + n - 2) : 2$.

La section de la variété $W_{n+1\ n-1}$ *située dans un espace* Σ *à* $n^2 = 3n + 2$ *dimensions par un espace à* $n^2 + 2n + 1$ *dimensions, est une variété possédant des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.*