Bulletin de la Classe des sciences

Construction de quelques surfaces projectivement canoniques (2e note)

Lucien Godeaux

Résumé
Compléments aux résultats obtenus dans la première note.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Construction de quelques surfaces projectivement canoniques

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

(Seconde note)

Résumé. — Compléments aux résultats obtenus dans la première note.

Dans la première note [1], nous avons construit des surfaces projectivement canoniques appartenant à des variétés W lieux de droites s'appuyant sur deux variétés de Veronese. Dans cette note, nous apportons quelques compléments au cas où les variétés de Veronese sont d'ordre huit et, incidemment, nous construisons une surface dont le système canonique est composé au moyen d'un faisceau elliptique de courbes elliptiques.

1. Soit dans un espace S_7 à sept dimensions une homographie biaxiale harmonique H possédant deux axes ponctuels σ_1, σ_2 à trois dimensions. Dénotons par y_0, y_1, y_2, y_3 les coordonnées d'un point de σ_1 et par z_0, z_1, z_2, z_4 celles d'un point de σ_2.

Parmi les hyperquadriques de S_7, il y a deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I engendrée par H. L'un de ces systèmes, $| Q_0 |$, est formé de ∞^{19} hyperquadriques ne contenant pas les axes σ_1, σ_2 (simultanément), l'autre, $| Q_1 |$, est formé des ∞^{15} hyperquadriques contenant les axes σ_1, σ_2.

Rapportons projectivement les hyperquadriques Q_0 aux hyperplans d'un espace Σ à 19 dimensions. L'involution I est représentée dans

[1] La première note est parue dans le Bulletin de l'Académie, 1970, pp. 871-885.

cet espace par une variété W obtenue de la manière suivante: Dans l'espace Σ il existe deux espaces Σ_1, Σ_2 à neuf dimensions qui ne se rencontrent pas. Dans Σ_1, il existe une variété de Veronese M représentant les quadriques de l'espace σ_1 et dans Σ_2, une variété de Veronese N représentant les quadriques de l'espace σ_2. La variété W est le lieu des droites s'appuyant sur les variétés M et N. La variété W est à sept dimensions, d'ordre 64. Elle passe huit fois par chacune des variétés M, N.

Aux hyperquadriques Q_1 correspondent dans Σ des hyperquadriques Q'_1 passant par Σ_1, Σ_2 et touchant la variété W suivant une variété d'ordre 64.

Sur une surface F intersection de cinq hyperquadriques de S_7, l'homographie H détermine une involution. Ses courbes canoniques sont découpées par les hyperquadriques ne contenant pas F. Cette surface étant l'intersection complète de variétés, est régulière et a donc en général des genres $p_a = p_g = 31$. Le système canonique $| C |$ contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I. L'un, $| C_0 |$, est découpé par les hyperquadriques Q_0 ne contenant pas F et le second, $| C_1 |$, est découpé par les hyperquadriques Q_1 ne contenant pas F.

2. Si la surface F est l'intersection de cinq hyperquadriques Q_0, la surface Φ, image des groupes de I appartenant à F est la section de W par un espace à 14 dimensions, elle est d'ordre 64 et ne possède pas de point de diramation, car l'espace S_{14} qui la contient ne rencontre pas les variétés M, N.

A une courbe canonique Γ de Φ correspond sur F une courbe C_0 ou une courbe C_1. Dans le premier cas, le système $| \Gamma |$ aura la dimension 14 et dans le second, la dimension 15. Or on a pour genre arithmétique de Φ, $p'_a = 15$. Donc au système canonique $| \Gamma |$ de Φ correspond le système $| C_0 |$ et la surface Φ est projectivement canonique. Son genre linéaire est $p^{(1)} = 65$.

3. Si la surface F est l'intersection de quatre hyperquadriques Q_0 et d'une hyperquadrique Q_1, la surface Φ appartient à un espace S_{15} à quinze dimensions. Le genre arithmétique de Φ est $p'_a = 15$ (1) et

(1) Dans la première note, p. 884, ligne 12, on donne la valeur 17 pour le genre arithmétique. C'est évidemment un lapsus calami, comme le prouve d'ailleurs le contexte.

sur F, le système $|C_0|$ a la dimension 15 et le système $|C_1|$ la dimension quatorze. C'est donc le système $|C_1|$ qui correspond au système canonique $|\Gamma|$ de Φ. L'espace S_{15} de Φ ne rencontre pas les variétés M et N, de sorte que la surface est privée de points de diramation.

Les courbes canoniques de Φ sont donc des courbes suivant lesquelles une hyperquadrique Q_1' touche la surface. Celle-ci est encore d'ordre 64.

L'ordre de la surface Φ est égal à la moitié du nombre de points communs à quatre hyperquadrique Q_0 et à trois hyperquadriques Q_1. Les trois dernières ont en commun une variété à quatre dimensions d'ordre huit passant par les espaces σ_1 et σ_2, mais comme les hyperquadriques Q_0 ne passent pas par ces espaces, le nombre cherché est égal à 2^5. Il en résulte que Φ est d'ordre 64 et que le genre linéaire de cette surface est égal à 65.

Le long de la surface Φ il existe une hyperquadrique Q_1' passant par les espaces Σ_1 et Σ_2, touchant la variété W en chaque point d'intersection. Cette surface n'est pas projectivement canonique.

4. Supposons que la surface F soit l'intersection de trois hyperquadriques Q_0 et de deux hyperquadriques Q_1. L'involution I appartenant à cette surface possède 16 points unis, huit dans chacun des espaces σ_1 et σ_2. Ces points sont simples pour la surface F et la surface Φ correspondante possède huit points double de diramation dans chacun des espaces Σ_1, Σ_2.

La surface Φ est l'intersection de W par un espace à 16 dimensions et le long de cette surface, il y a deux hyperquadriques Q_1' qui touchent la variété W. On a pour le genre arithmétique de Φ, $p_a' = 17$.

Les systèmes $|C_0|$ et $|C_1|$ ont respectivement les dimensions 16 et 13. Au système canonique $|\Gamma|$ de Φ correspond donc sur F le système $|C_0|$ et la surface Φ est projectivement canonique.

L'ordre de la surface Φ est égal à la moitié du nombre de points communs à six hyperquadriques Q_0 et une hyperquadrique Q_1, c'est-à-dire à 45. Le genre linéaire de Φ est donc $p^{(1)} = 46$.

5. Observons que parmi les hyperquadriques Q_0 se trouvent les cônes projetant de σ_1 (ou de σ_2) des quadriques de σ_2 (ou de σ_1). A ces cônes correspondent dans Σ des hyperplans passant par Σ_1

(ou par Σ_2). Nous dénoterons par φ les quadriques de l'espace σ_1 et par $\bar{\varphi}$ les cônes qui les projettent de σ_2.

Considérons une surface F' intersection de trois hyperquadriques Q_0 ne contenant ni σ_1, ni σ_2 et de deux cônes $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$ (projetant des quadriques φ_1, φ_2 de σ_1). C'est une surface d'ordre 32.

Les trois hyperquadriques Q_0 ont en commun une variété V_4 à quatre dimensions, d'ordre huit, rencontrant les espaces σ_1, σ_2 chacun en huit points. Nous désignerons par $A_1, .A_2, \dots, A_8$ les huit de ces points situés dans σ_2.

Les cônes $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$ ont en commun une variété V'_5 à cinq dimensions lieu des espaces à quatre dimensions projetant de σ_2 les points de la biquadratique (φ_1, φ_2) commune aux quadriques φ_1, φ_2. Les points A sont quadruples pour V'_5.

Il en résulte que la surface F' a pour points quadruples les huit points A. Par conséquent les adjointes à F' sont des hyperquadriques passant doublement par les points A, c'est-à-dire sont les cônes projetant de σ_1 les quadriques de distinctes de φ_1, φ_2. Le genre géométrique de F' est donc $p_g = 8$.

Un espace à quatre dimensions passant par σ_2 rencontre σ_1 en un point. P Il coupe la variété V'_5 suivant une courbe d'ordre huit et de genre cinq. Considérons une adjointe $\bar{\varphi}$ à F'. Son intersection avec la surface doit appartenir à la variété V_5. Par conséquent le point P doit appartenir à la biquadratique (φ_1,φ_2). Il en résulte que chaque courbe canonique C de F' est formée de huit courbes d'ordre huit et de genre cinq, variables dans un faisceau elliptique, car la courbe (φ_1,φ_2) est en général elliptique. Nous désignerons ces courbes d'ordre huit par γ. Le système canonique $| C |$ de F' est donc composé au moyen du faisceau elliptique $\{\gamma\}$, les huit courbes formant une courbe canonique variant dans une série d'ordre huit et de dimension sept du faisceau.

6. Les groupes de l'involution I appartenant à F' ont pour image les points d'une surface Φ'. Pour obtenir les caractères de celle-ci, nous ne pouvons appliquer la théorie des involutions que nous avons élaborée parce que les points unis A ne sont pas simples pour la surface F'.

La surface Φ' est l'intersection de la variété W par trois hyperplans ne passant pas par Σ_1, Σ_2 ct de dcux hyperplans ζ_1, ξ_2 passant par

Σ_2. Elle possède huit points de diramation $A_1^1, A_2', \ldots, A_8'$ appartenant à la variété N et correspondant aux points A. L'espace (ξ_1,ξ_2) coupe Σ_1 suivant un espace à sept dimensions qui coupe à son tour la variété M suivant une courbe d'ordre huit. Le cône tangent à Φ' en un point A′ projette cette courbe et par conséquent les points A′ sont multiples d'ordre huit pour la surface Φ'.

Considérons une courbe γ et soit γ' la courbe qui lui correspond sur Φ'. Dans la correspondance (1,2) entre une courbc γ' ct la courbe γ homologue, il y a huit points de diramation, par conséquent, d'après la formule de Zeuthen, les courbes μ' sont elliptiques. Elles forment un faisceau elliptique $\{\gamma'\}$.

Aux courbes canoniques C de F′ correspondent sur Φ' des courbes formées de huit courbes γ'. Le système canonique $|\,\Gamma\,|$ de Φ' est donc composé au moyen du faisceau $\{\gamma'\}$ et la surface a les genres $p_g' = 8$, $p^{(1)} = 1$. D'autre part la surface est irrégulière et a le genre arithmétique $p_a' = 7$.

La surface Φ' est contenue dans un espace à 14 dimensions rencontrant l'espace Σ_2 suivant un espace à six dimensions.

Liège, le 22 octobre 1972.