Académie royale de Belgique.

—

EXTRAIT

du *Bulletin de la Classe des Sciences*

5e série — t. XVIII — No 10 — 1932

Koninklijke Belgische Academie.

—

UITTREKSEL

der *Mededeelingen van de Afdeeling Wetenschappen*

5de Reeks — B. XVIII — Nr 10 — 1932

Sur les conditions pour que les directrices de Wilczynski d'une surface forment des congruences W,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Dans un travail antérieur (1), nous avons étudié les congruences formées par les directrices de Wilczynski d'une surface et établi que si l'une des directrices était tangente asymptotique d'une certaine surface (p), l'autre était tangente asymptotique d'une surface (m). M. Rozet vient de retrouver ce résultat par une autre méthode (2).

Dans cette note, nous nous proposons de déterminer les conditions pour que les directrices de Wilczynski d'une surface décrivent des congruences W; nous cherchons ensuite les équations différentielles des asymptotiques des surfaces (p), (m) lorsque les directrices de Wilczynski sont des tangentes asymptotiques de ces surfaces.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes d'un point x de cette surface satisfont à un système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles que l'on peut ramener à la forme (Wilczynski)

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0,$$

a et b n'étant pas identiquement nulles.

(1) Sur les congruences formées par les directrices de Wilczynski d'une surface (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 1928, pp. 335-345).

(2) Sur les directrices de Wilczynski d'une surface (*Ibid.*, octobre 1932).

Désignons par Q l'hyperquadrique représentant les droites de l'espace à trois dimensions contenant la surface (x) et appartenant à un espace linéaire à cinq dimensions, par U, V les points de Q représentant les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} au point x à la surface (x). On a

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0.$$

Les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\dots, U_1, U, V, V_1, \dots$$

dont chaque terme est le transformé du précédent dans le sens des u.

Tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$z_1 x + z_2 x^{10} + z_3 x^{01} + z_4 x^{11},$$

x étant un point non parabolique de la surface (x). Les nombres z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales du point considéré.

2. La première directrice de Wilczynski r de la surface (x) a pour équations locales

$$\frac{z_2}{(\log b)^{01}} = \frac{z_3}{(\log a)^{10}} = \frac{z_4}{-2}. \qquad (r)$$

Elle est représentée sur Q par le point

$$R = U_1 + V_1.$$

On a

$$R^{10} = h_1 U + V_2 + V_1 (\log a k_1)^{10},$$
$$R^{01} = U_2 + U_1 (\log b h_1)^{01} + k_1 V,$$
$$R^{11} = h_1 U_1 + k_1 V_1 + h_1 U (\log b h_1)^{01} + k_1 V (\log a k_1)^{10},$$

où h_1, k_1 sont données par

$$h_1 = -(\log b)^{11} + 4ab, \qquad k_1 = -(\log a)^{11} + 4ab.$$

On a ensuite

$$R^{20} = h_1^{10}\,U - 2bh_1\,V + V_3 + V_2\,(\log a^2k_1^2k_2)^{10} + V_1\left[(\log ak_1)^{20} + \overline{(\log ak_1)^{10}}^{2}\right],$$

où

$$k_2 = -(\log ak_1)^{11} + k_1.$$

En tenant compte de la relation (1)

$$2V_3 + 2V_2\,(\log a^3k_1^2k_2)^{10} + 2V_1\left[\alpha + (\log ak_1)^{20} + (\log a^2k_1)^{10}\,(\log ak_1)^{10}\right] + \alpha\,(\log a^2\alpha)^{10}\,V + b\beta U + 4bU_1\,(\log bh_1)^{01} + 4bU_2 = 0,$$

où

$$\alpha = 2\,(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^{2} + 4\,(b^{01} + c_1),$$
$$\beta = 2\,(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^{2} + 4\,(a^{10} + c_2),$$

on a

$$2R^{20} = -4bU_2 - 4bU_1\,(\log bh_1)^{01} + 2\left[h_1^{10} - 2b\beta\right]U - \left[4bh_1 + \alpha(\log a^2\alpha)^{10}\right]V - 2V_1\left[\alpha + (\log a)^{10}\,(\log ak_1)^{10}\right] - 2V_2\,(\log a)^{10}$$

En tenant compte des expressions de R^{10}, R^{01}, on peut enfin écrire

$$\left.\begin{aligned} 2\left[R^{20} + R^{10}(\log a)^{10} + 2bR^{01}\right] = -2\alpha V_1 \\ + U\left[2h_1(\log ah_1)^{10} - 4b\beta\right] - V\left[\alpha(\log a^2\alpha)^{10} + 4b(h_1 - k_1)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

On a de même

$$\left.\begin{aligned} 2\left[R^{02} + R^{01}\,(\log b)^{01} + 2aR^{10}\right] = -2\beta U_1 \\ + V\left[2k_1\,(\log bk_1)^{01} - 4a\alpha\right] - U\left[\beta\,(\log b^2\beta)^{01} + 4a(k_1 - h_1)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

3. Supposons que la surface (x) ne soit pas isothermo-asymptotique, c'est-à-dire que $h_1 - k_1$ ne soit pas nulle. On a alors

$$2R^{11} - 2h_1R = 2(k_1 - h_1)\,V_1 - \beta^{10}\,U - \alpha^{01}\,V,$$
$$2R^{11} - 2k_1R = 2(h_1 - k_1)\,U_1 - \beta^{10}U - \alpha^{01}\,V,$$

en remarquant que

$$\alpha^{01} = -2k_1\,(\log ak_1)^{10}, \quad \beta^{10} = -2h_1\,(\log bh_1)^{01}.$$

(1) L. Godeaux, Remarque sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie (*Comptes rendus du Congrès national des Sciences*, Bruxelles, 1930).

Les relations (1), (2) deviennent dans ce cas

$$\left.\begin{aligned} &2(k_1-h_1)[\mathrm{R}^{20}+\mathrm{R}^{10}(\log a)^{10}+2b\mathrm{R}^{01}]+2\alpha(\mathrm{R}^{11}-h_1\mathrm{R})\\ &\quad=\mathrm{U}[2h_1(k_1-h_1)(\log ah_1)^{10}-4b\beta(k_1-h_1)-\alpha\beta^{10}]\\ &\quad-\mathrm{V}[\alpha(k_1-h_1)(\log a^2\alpha)^{10}-4b(k_1-h_1)^2+\alpha\alpha^{01}], \end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$\left.\begin{aligned} &2(h_1-k_1)[\mathrm{R}^{02}+\mathrm{R}^{01}(\log b)^{01}+2a\mathrm{R}^{10}]+2\beta(\mathrm{R}^{11}-k_1\mathrm{R})\\ &\quad=\mathrm{V}[2k_1(h_1-k_1)(\log bk_1)^{01}-4a\alpha(h_1-k_1)-\beta\alpha^{01}]\\ &\quad-\mathrm{U}[\beta(h_1-k_1)(\log b^2\beta)^{01}-4a(h_1-k_1)^2+\beta\beta^{10}]. \end{aligned}\right\}\quad(4)$$

4. Pour que le point R satisfasse à une équation de Laplace, c'est-à-dire pour que la directrice de Wilczynski correspondante r décrive une congruence W, les seconds membres des équations (3) et (4) doivent être identiques. Cela entraîne la condition nécessaire et suffisante

$$\left.\begin{aligned} &\varphi^2(\log a^2\varphi)^{10}(\log b^2\varphi)^{01}-\varphi(\log a^2\varphi)^{10}[\alpha\beta(\log b^2\beta)^{01}\\ &\qquad+(k_1-h_1)\beta^{10}+4a\alpha(k_1-h_1)]\\ &-\varphi(\log b^2\varphi)^{01}[\alpha\beta(\log a^2\alpha)^{10}+(h_1-k_1)\alpha^{01}+4b\beta(h_1-k_1)]\\ &-\varphi\alpha^{01}\beta^{10}-16ab(h_1-k_1)^2\varphi+\alpha\beta\varphi(\log a^2\alpha)^{10}(\log b^2\beta)^{01}=0, \end{aligned}\right\}\quad(5)$$

où l'on a posé

$$\varphi=(h_1-k_1)^2+\alpha\beta.$$

5. La condition (5) est satisfaite lorsqu'on pose $\varphi=0$. On sait qu'alors les directrices de Wilczynski de la surface (x) sont des tangentes asymptotiques de certaines surfaces. Dans cette hypothèse, les seconds membres des équations (3), (5) peuvent respectivement s'écrire

$$\left[\alpha(\log a^2\alpha)^{10}+4b(h_1-k_1)-\frac{\alpha\alpha^{01}}{h_1-k_1}\right][\beta\mathrm{U}+(h_1-k_1)\mathrm{V}],$$

$$[-(h_1-k_1)(\log b^2\beta)^{01}-4a\alpha-\beta^{10}][\beta\mathrm{U}+(h_1-k_1)\mathrm{V}].$$

En posant, pour abréger,

$$\mathrm{A}=(h_1-k_1)(\log b^2\beta)^{01}+4a\alpha+\beta^{10},$$

$$\mathrm{B}=(k_1-h_1)(\log a^2\alpha)^{10}+4b\beta+\alpha^{01},$$

on a donc

$$\left.\begin{array}{l} A(h_1-k_1)[R^{20}+R^{10}(\log a)^{10}+2b\,R^{01}]-\alpha B[R^{02}+R^{01}(\log b)^{01}+2a\,R^{10}] \\ \quad -\alpha A\,(R^{11}-h_1R)+B(h_1-k_1)(R^{11}-k_1R)=0. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Les caractéristiques de l'équation (6) sont données par l'équation différentielle

$$(A\,dv - B\,du)\,[(h_1-k_1)\,dv+\alpha\,du]=0. \qquad (7)$$

La directrice r est une tangente asymptotique de la surface engendrée par le point

$$p=[16\,ab-(\log ab)^{11}-(\log a)^{10}(\log b)^{01}]x+2x^{10}(\log b)^{01} \\ +2x^{01}(\log a)^{10}-4x^{11}.$$

L'équation (7) définit les asymptotiques de la surface (p). Précisément la tangente asymptotique r correspond à

$$\alpha\,du+(h_1-k_1)\,dv=0.$$

6. Occupons-nous maintenant du cas où la surface (x) est isothermo-asymptotique. On a $h_1=k_1$ et les équations (1), (2) donnent

$$2\beta[R^{20}+R^{10}(\log a)^{10}+2b\,R^{01}]+2\alpha[R^{02}+R^{01}(\log b)^{01}+2a\,R^{10}]+2\alpha\beta R \\ =-\beta[\alpha^{01}+4b\beta+\alpha(\log b^2\beta)^{01}]\,U-\alpha[\beta^{10}+4a\alpha+\beta(\log a^2\alpha)^{10}\,V.$$

On a, d'autre part,

$$2R^{11}-2h_1R=-\beta^{10}U-\alpha^{01}V.$$

Pour que la droite r décrive une congruence W, les seconds membres de ces deux relations doivent être identiques. On doit donc avoir

$$\left.\begin{array}{l} \beta\alpha^{01}[\alpha^{01}+4b\beta+\alpha(\log b^2\beta)^{01}] \\ =\alpha\beta^{10}[\beta^{10}+4a\alpha+\beta(\log a^2\alpha)^{10}] \end{array}\right\} \quad (5')$$

Si la droite r est tangente asymptotique d'une certaine surface (p), c'est-à-dire si l'on a $\varphi=0$. on a $\alpha\beta=0$ et l'une au moins des quantités α, β est nulle. La condition (5′) est satisfaite.

Supposons $\beta = 0$ et α non nulle. Les quadriques de Lie de la surface (x) n'ont que trois points caractéristiques [1]. Observons que l'on a

$$a\alpha(\log a^2\alpha)^{10} = b\beta(\log b^2\beta)^{01} = 0.$$

Il vient alors

$$2[R^{20} + R^{10}(\log a)^{10} + 2bR^{01}] = -2\alpha V_1 - \alpha^{01}U,$$
$$2[R^{02} + R^{01}(\log b)^{01} + 2aR^{10}] = -4a\alpha V$$
$$2R^{11} - 2h_1 R = -\alpha^{01} V.$$

On en déduit

$$\alpha^{01}[R^{02} + R^{01}(\log b)^{01} + 2a R^{10}] - 4a\alpha(R^{11} - h_1 R) = 0.$$

L'équation différentielle des caractéristiques de l'équation précédente est

$$(\alpha^{01}du + 4a\alpha dv)\,du = 0.$$

Elles donnent les asymptotiques de la surface (p). Les directrices r sont les tangentes aux courbes u de cette surface.

Dans le cas $\alpha = \beta = 0$, les droites r passent par un point fixe; nous l'avons étudié récemment [2]. Les quadriques de Lie de la surface (x) n'ont que deux points caractéristiques et les deux nappes de l'enveloppe se correspondent dans une homologie harmonique.

7. La seconde directrice de Wilczynski s de la surface (x) a pour équations locales

$$2z_1 + z_2(\log a)^{10} + z_3(\log b)^{01} = 0, \qquad z_4 = 0; \qquad (s)$$

(1) L. Godeaux, Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1929, pp. 26-41).

(2) Sur les surfaces projectivement applicables ayant mêmes quadriques de Lie (*Anais da Faculdade de Sciências do Porto*, 1928, pp. 157-161); Sur les surfaces isothermo-asymptotiques dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1932, pp. 88-90).

elle est représentée, sur l'hyperquadrique Q, par le point

$$S = U_1 - V_1.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
S^{10} &= h_1 U - V_2 - V_1 (\log a k_1)^{10},\\
S^{01} &= U_2 + U_1 (\log b h_1)^{01} - k_1 V_1\\
S^{11} &= h_1 U_1 - k_1 V_1 + h_1 U (\log b h_1)^{01} - k_1 V (\log a k_1)^{10}.
\end{aligned}$$

Si l'on suppose que $h_1 - k_1$ n'est pas nulle, on trouve

$$\begin{aligned}
&2(k_1 - h_1)[S^{20} + S^{10} (\log a)^{10} - 2b\, S^{01}] + 2\alpha (S^{11} - h_1 S)\\
&\quad = U[2h_1 (k_1 - h_1)(\log a h_1)^{10} + 4b\beta (k_1 - h_1) - \alpha\beta^{10}]\\
&\quad + V[\alpha(k_1 - h_1)(\log a^2\alpha)^{10} + 4b(k_1 - h_1)^2 + \alpha\alpha^{01}],\\
&2(h_1 - k_1)[S^{02} + S^{01} (\log b)^{01} - 2a\, S^{10}] + 2\beta (S^{11} - k_1 S)\\
&\quad = - V[2k_1 (h_1 - k_1)(\log b k_1)^{01} + 4a\alpha (h_1 - k_1) - \beta\alpha^{01}]\\
&\quad - U[\beta (h_1 - k_1)(\log b^2\beta)^{01} + 4a(h_1 - k_1)^2 + \beta\beta^{10}].
\end{aligned}$$

On en déduit que la condition nécessaire et suffisante pour que la droite s décrive une congruence W est

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi^2 (\log a^2\varphi)^{10} (\log b^2\varphi)^{01}\\
&- \varphi (\log a^2\varphi)^{10} [\alpha\beta (\log b^2\beta)^{01} + (k_1 - h_1)\beta^{10} - 4a\alpha (k_1 - h_1)]\\
&- \varphi (\log b^2\varphi)^{01} [\alpha\beta (\log a^2\alpha)^{10} + (h_1 - k_1)\alpha^{01} - 4b\beta (h_1 - k_1)]\\
&- \varphi\alpha^{01}\beta^{10} - 16\, ab (h_1 - k_1)^2 \varphi + \alpha\beta\varphi (\log a^2\alpha)^{10} (\log b^2\beta)^{01} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Cette condition est distincte de la relation (5).

8. La condition nécessaire et suffisante pour que la droite s soit tangente asymptotique à une surface est $\varphi = 0$. La condition (8) est alors satisfaite. Les droites s sont précisément des tangentes asymptotiques de la surface (m) engendrée par le point

$$m = [x (\log a)^{10} - 2x^{10}](h_1 - k_1) + \alpha [x (\log b)^{01} - 2x^{01}].$$

Le point S satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}
&A_1 (h_1 - k_1)[S^{20} + S^{10} (\log a)^{10} - 2b\, S^{01}] + \alpha B_1 [S^{02} + S^{01} (\log b)^{01} - 2a S^{1}]\\
&\quad - \alpha A_1 (S^{11} - h_1 S) - B_1 (h_1 - k_1)(S^{11} - k_1 S) = 0,
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$A_1 = (h_1 - k_1)(\log b^2\beta)^{01} - 4a\alpha + \beta^{10},$$
$$B_1 = (k_1 - h_1)(\log a^2\alpha)^{10} - 4b\beta + \alpha^{01}.$$

Les caractéristiques de cette équation sont les asymptotiques de la surface (m) ; elles sont définies par l'équation différentielle

$$(B_1\, du + A_1\, dv)\,[\alpha\, du + (h_1 - k_1)\, dv] = 0.$$

Le second facteur, égalé à zéro, définit les asymptotiques ayant pour tangentes les droites s.

9. Supposons que la surface (x) soit isothermo-asymptotique. On a $h_1 = k_1$ et les relations

$$2\beta[S^{20} + S^{10}(\log a)^{10} - 2b\,S^{01}] + 2\alpha[S^{02} + S^{01}(\log b)^{01} - 2a\,S^{10}] + 2\alpha\beta S$$
$$= -U[\alpha^{01} - 4b\beta + \alpha(\log b^2\beta)^{01}]\beta + V[\beta^{10} - 4a\alpha + \beta(\log a^2\alpha)^{10}]\alpha,$$
$$2S^{11} - 2h_1 S = -\beta^{10}U + \alpha^{01}V.$$

La condition pour que la droite s engendre une congruence W est donc

$$\beta\alpha^{01}[\alpha^{01} - 4b\beta + \alpha(\log b^2\beta)^{01}] = \alpha\beta^{10}[\beta^{10} - 4a\alpha + \beta(\log a^2\alpha)^{10}].$$

Si la droite s est tangente asymptotique à une surface (m), on a $\alpha\beta = 0$. Dans le cas $\alpha = \beta = 0$, la droite s appartient à un plan et nous renverrons à nos travaux cités plus haut. Supposons que l'on ait $\beta = 0$, α n'étant pas nulle. Le point s satisfait alors à l'équation aux dérivées partielles

$$\alpha^{01}[S^{02} + S^{01}(\log b)^{01} - 2a\,S^{10}] + 4a\alpha(S^{11} - h_1 S) = 0.$$

Les asymptotiques de la surface (m) sont définies par l'équation différentielle

$$du\,(\alpha^{01}\, du - 4a\alpha\, dv) = 0.$$

Les droites s sont tangentes aux lignes v $(du = 0)$.

Liége, le 20 septembre 1932.