Bulletin de la Classe des sciences

Structure d'un point uni d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique (seconde note)

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination de la structure d'un point uni d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique et de celle du point de diramation correspondant sur une surface image de l'involution.

COMMUNICATIONS D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Structure d'un point uni d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique

(seconde note)

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination de la structure d'un point uni d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique et de celle du point de diramation correspondant sur une surface image de l'involution.

Nous terminons dans cette note l'étude de la structure d'un point uni d'une involution cyclique particulière d'ordre premier $p = 2\nu + 1$ appartenant à une surface algébrique. Ce point uni A est caractérisé par le fait que l'involution binaire déterminée dans le faisceau des tangentes à la surface F support de l'involution possède deux droites unies a et b et que les courbes d'un système linéaire $|C|$ dépourvu de point-base, appartenant à l'involution, passant par A, y acquièrent un point triple avec deux tangentes confondues avec a et une avec b. Dans notre première note (1), nous avons montré que deux cas peuvent se présenter suivant que p est de la forme $6t + 1$ ou $6t + 5$ et nous avons étudié le premier cas. Nous étudierons ici le second en supposant pour simplifier $p = 6t - 1$. Nous poursuivons dans cette hypothèse l'étude des systèmes linéaires $|C_0^1|, |C_0^2|, \ldots, |C_0^\nu|, |C_0^{\nu+1}|$ appartenant à $|C|$ et dont les courbes ont des multiplicités croissantes en A. Les premiers systèmes ont en A des tangentes fixes a et b, le dernier ayant un point multiple d'ordre p à tangentes variables.

(1) La première note est parue dans le Bulletin de l'Académie, 1971, pp. 85-100.

Le point A est l'origine de deux branches linéaires appartenant aux courbes C_0^1, que nous désignerons par α, β, la première étant tangente à a et la seconde à b en A. Pour les $t-1$ systèmes $|C_0^2|$, $|C_0^3|, \ldots$, $|C_0^t|$, les courbes ont respectivement en commun deux branches superlinéaires d'origine A se détachant l'une de la branche α, l'autre de la branche β. Les courbes C_0^{t-1} ont en commun deux branches superlinéaires d'origine A se détachant de β. Les courbes des systèmes suivants ont respectivement en commun deux branches superlinéaires partant de A et se détachant l'une de α, l'autre de β, mais les premières ont déjà été rencontrées dans les t premiers systèmes, les autres étant nouvelles.

On constate que deux des derniers systèmes consécutifs ont alternativement en commun une branche se détachant de α ou de β.

Sur une surface image de l'involution, le point de diramation A' homologue de A est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de $v+1$ courbes rationnelles, l'une de degré virtuel -3, les autres de degré virtuel -2.

15. Dans notre première note nous avons supposé $p = 6t+1$, nous devons considérer actuellement $p = 6t+5$, pour alléger l'impression, nous supposerons $p = 6t-1$, $v = 3t-1$.

Les systèmes linéaires compris dans $|C_0|$ et passant par le point uni A sont encore de deux sortes: Les uns passent $6t-3i-1$ fois par A et ont i tangentes confondues avec b et $2i$ avec a. Les autres passent $3t-3k-2$ fois par A et ont $2k-1$ tangentes confondues avec a et $3t+k-1$ avec b ($i = 1, 2, \ldots, t-1$; $k = 1, 2, \ldots, t$).

Observons que lorsque l'on classe les systèmes précédents par ordre croissant des multiplicités en A, le système donné par $k = 1$ suit immédiatement le système donné par $i = t$, et est suivi par le système donné par $i = t+1$.

Nous désignerons par $|C_0^1|, |C_0^2|, \ldots, |C_0^t|$ les t premiers systèmes donnés par $t = 1, 2, \ldots, t$, par $|C_0^{t+2i-1}|$ le système dont les courbes ont la multiplicité $3t+3i-2$ en A et par $|C_0^{t+2i}|$ le système dont les courbes ont la multiplicité $3t+3i$ en A.

16. Le système $|C_0^1|$ se comporte comme dans le premier cas. Ses courbes passent trois fois par A, deux fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 3t-2)$ et une fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 2), \ldots$, $(\beta, 6t-3)$. Sur la surface Φ_1, dont les sections hyperplanes sont les

courbes Γ_1, il correspond au domaine du point $(\alpha, 3t - 2)$ une conique γ_{11} et au domaine du point $(\beta, 6t - 3)$ une droite γ_{21} se coupant en un point A_1.

Les courbes $| C_0^2 |, | C_0^3 |, \ldots, | C_0^t |$ passent par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 3t - 1)$, le dernier étant simple. Cela signifie que sur les surfaces Φ_i, il existe une droite γ'_{11} projection de la conique γ_{11} à partir du point A'_1.

Considérons le système $| C_0^i |$ $(i \leqslant t)$. Ses courbes passent $3i$ fois par A et ont $2i$ tangentes confondues avec a et i avec b.

Supposons que ces courbes passent $2i$ fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, x)$, y fois par le point $(\alpha, x + 1)$ et nécessairement une fois par les points $(\alpha, x + 2), \ldots, (\alpha, 3t - 2)$. On doit avoir

$$2ix + y + (3t - 2 - x) = 6t - 3i - 1,$$

c'est-à-dire

$$(2i - 1)x + y = 3t - 3i + 1. \tag{1}$$

Les valeurs de x et de y étant déterminées, on verra en utilisant les méthodes données dans T.I.C. (pp. 53 et suiv.), que les courbes C_0^i ont en commun une branche superlinéaire d'origine A se terminant en un point que nous désignerons par $(\alpha, x + 1, 1, \ldots)$, simple pour les courbes.

Observons d'ailleurs que l'on ne peut avoir $y = 0$, car alors p serait divisible par $2i - 1$.

Supposons de même que les courbes C_0^i passent i fois par les points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, x'), y'$ fois par le point $(\beta, x' + 1)$ et non par les points suivants. On doit avoir

$$ix' + y' = 6t - 3i - 1.$$

On ne peut avoir $y' = 0$ car alors p serait multiple de i. On voit que le point A est l'origine d'une branche superlinéaire passant par les points précédents, par le point $(\beta, x' + 1, 1)$ et aboutissant à un point simple que nous désignerons par $(\beta, x' + 1, 1, \ldots)$.

Sur la surface Φ_i, d'ordre $n - (2i + 1)$, aux domaines des points $(\alpha, x + 1, 1, \ldots)$ et $(\beta, x' + 1, 1, \ldots)$ correspondent des droites γ_{1i}, γ_{2i} se rencontrant en un point A'_i. En outre, au domaine de $(\alpha, 3t - 2)$ correspond la droite γ'_{11}.

Appliquons ce qui précède au système $| C_0^t |$. Le point A est l'origine d'une branche linéaire aboutissant au point $(\alpha, 3t - 2)$ et de deux branches superlinéaires passant l'une par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1)$, ..., $(\alpha, 1, 2t - 2)$, l'autre par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, $(\beta, 3)$, $(\beta, 3, 1)$, ..., $(\beta, 3, t - 2)$. Le point $(\alpha, 1)$ est double pour les courbes C_0^t, les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$ multiples d'ordre t, $(\beta, 3)$ multiple d'ordre $t - 1$, les autres points étant simples.

Sur la surface Φ_t, d'ordre $n - (2t + 1)$, on a deux droites γ_{1t}, γ_{2t} correspondant aux points $(\alpha, 1, 2t - 2)$ et $(\alpha, 3, t - 2)$ et la droite γ'_{11}.

17. Avant de considérer le système $| C_0^{t+1} |$, considérons le système $| C_0^{3t-1} |$, dont les courbes passent $6t - 2 = p - 1$ fois par A. Elles passent une fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1)$, ..., $(\alpha, 1, 2t - 2)$, $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, ... $(\beta, 1, 4t - 1)$.

Considérons maintenant le système $| C_0^{t+1} |$, dont les courbes passent $3t + 1$ fois par A et ont une tangente confondue avec a et $3t$ avec b. Ces courbes passent une fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, 3t - 2)$.

En considérant les intersections des courbes C_0^{t+1}, C_0^{3t-1}, on voit que les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, etc. comptent pour $3t$ points et en considérant l'intersection de deux courbes C_0^{t+1}, C_0^1, on voit que les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ... comptent pour $3t - 2$ points dans ces intersections.

La multiplicité du point $(\beta, 1)$, pour les courbes C_0^{t+1} est au plus égale à $3t - 2$ car ces courbes passent par le point $(\beta, 1, 1)$. Observons que les points $(\beta, 1, 1)$, .., $(\beta, 1, 4t --2)$ sont unis de seconde espèce pour l'involution, par conséquent les courbes C_0^{t+1} passent au moins deux fois par $(\beta, 1, 1)$.

Une analyse des points du domaine de A appartenant aux courbes C_0^{t+1} en tenant compte du fait que la multiplicité des intersections de ces courbes en A est multiple de p, montre que les courbes passent $t + 3$ fois par $(\beta, 1)$, $t + 1$ fois par $(\beta, 2)$, $t - 6$ fois par $(\beta, 3)$, deux fois par $(\beta, 1, 1)$, ..., $(\beta, 1, t - 2)$, une fois par $(\beta, 1, t - 1)$, $(\beta, 1, t - 1, 1)$ et par les points $(\beta, 3, 1)$, ... Cela suppose $t > 6$, et d'une façon précise $t > 5$, car on ne peut avoir $t = 6$, qui donne $p = 35$. Nous nous placerons désormais dans cette hypothèse $t > 5$, nous réservant d'examiner les cas exclus plus loin.

Supposons $t = 7$. Les courbes passent par les points $(\beta, 3, 1)$, ..., $(\beta, 3, 7)$.

Si $t = 8$, les courbes passent deux fois par $(\beta, 3,1)$, $(\beta, 3, 2)$, $(\beta, 3, 3)$ et une fois par $(\beta, 3, 4)$, $(\beta, 3, 4, 1)$.

Si $t = 9$, les courbes passent trois fois par $(\beta, 3, 1)$, $(\beta, 3, 2)$ et une fois par $(\beta, 3, 3)$, $(\beta, 3, 3, 1)$, $(\beta, 3, 3, 3, 2)$.

Si $t = 10$, les courbes passent quatre fois par $(\beta, 3, 1)$, trois fois par $(\beta, 3, 2)$ une fois par $(\beta, 3, 3, 1)$, $(\beta, 3, 2, 1, 1)$, $(\beta, 3, 2, 1, 2)$.

Si $t = 11$, les courbes passent cinq fois par $(\beta, 3, 1)$, deux fois par $(\beta, 3, 2)$ et par $(\beta, 3, 2, 1)$, une fois par $(\beta, 3, 2, 2)$, $(\beta, 3, 2, 2, 1)$.

Si $t > 11$, la recherche se poursuit par les méthodes de T.I.C. et on obtient que les courbes passent par les points d'une branche superlinéaire d'origine A passant par $(\beta, 3, 1)$ et se terminant par un point simple que nous désignerons par $(\beta, 3, 1, \ldots)$.

Sur la surface Φ_{t+1} nous avons une droite γ'_{11} et deux droites $\gamma_{2\,t+1}, \gamma_{2\,t+2}$ représentant les domaines des points $(\beta, 1, t-1, 1)$ et $(\beta, 3, 1, \ldots)$ ou les points obtenus pour $t = 7, \ldots, 11$.

Observons que la surface Φ_t étant d'ordre $n - (t+1)$ et le point A'_t étant double biplanaire pour cette surface, la surface Φ_{t+1} est d'ordre $n - (2t+3)$. Le point A doit absorber $(6t-1)(3t+1)$ points d'intersections des courbes C_0^{t+1} et par suite, les points $(\beta, 3, 1)$, $\ldots$, $(\beta, 3, 1, \ldots)$ absorbent $7t - 42$ de ces points.

18. Nous allons considérer le système $|\,C_0^{t+2}\,|$ dont les courbes passent $3t+3$ fois par A avec $2t+2$ tangentes confondues avec a et $t+1$ avec b. Nous supposerons $t > 5$.

On trouve aisément que les courbes du système passent $t+1$ fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$ et $t-6$ fois par $(\beta, 3)$. La branche superlinéaire d'origine A et se terminant au point $(\beta, 3, 1, \ldots)$ appartient donc aux courbes C_0^{t+1} et C_0^{t+2}.

On trouve que les courbes C_0^{t+2} passent quatre fois par le point $(\alpha, 1)$, trois par les points $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, t-2)$, une fois par les points $(\alpha, t-1)$, $(\alpha, t-1, 1)$, $(\alpha, t-1, 2)$ et enfin une fois par les points $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, 2t-2)$.

Aux domaines des points $(\alpha, t-1, 2)$ et $(\alpha, 1, 2t-2)$ correspondent les droites γ_{12} et γ_{1t} déjà rencontrées, de même que la droite $\gamma_{2\,t+2}$ correspondant au domaine du point $(\beta, 3, 1, \ldots)$. Sur la surface Φ_{t+2}, trois droites sont donc tracées: les droites γ_{12}, γ_{1t} et $\gamma_{2\,t+2}$. Cette surface est d'ordre $n - (2t+5)$, de sorte que le point de la surface Φ_{t+1} commun aux droites γ_{11} et $\gamma_{2\,t+1}$ est double biplanaire pour cette surface.

19. Considérons le système $| C_0^{t+2i-1} |$ dont les courbes passent $2t + 2i - 2$ fois par A et ont $2i - 1$ tangentes confondues avec a et $3t + i - 1$ avec b.

Ces courbes passent $2i - 1$ fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, x)$, y fois par $(\alpha, x + 1)$ et l'on doit avoir

$$(2i - 1)x + y = 3t - 3i + 1.$$

Cette équation coïncide avec l'équation (1) du n° 16. Il en résulte que sur les courbes envisagées se trouve la même branche superlinéaire que sur les courbes C_0^{ν}, branche aboutissant à un point simple au domaine duquel correspond sur la surface Φ_i la droite γ_{1i}.

Les courbes C_0^{t+2i-1} passent $t + i + 2$ fois par le point $(\beta, 1)$, deux fois par les points $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, t - 2)$, une fois par les points $(\beta, 1, t - 1), (\beta, 1, t - 1, 1)$. Au domaine de ce point correspond sur la surface Φ_{t+1} la droite $\gamma_{2\ t-2}$.

Si $5i$ est inférieur à $t - 1$, les courbes C_0^{t+2i-1} passent $t + i$ fois par le point $(\beta, 2)$ et $t - 5i - 1$ fois par le point $(\beta, 2)$. Elles passent en outre par une suite de points $(\beta, 3, 1), \ldots$ pour aboutir à un point simple que nous désignerons par $(\beta, 3, 1, \ldots)$. Si au contraire $5i$ est supérieur à $t - 1$, les courbes passent $2t - 4i - 1$ fois par $(\beta, 2)$ et par une suite de points $(\beta, 2, 1), \ldots$ dont le dernier est un point simple que nous désignerons par $(\beta, 2, 1, \ldots)$. Dans tous les cas les courbes contiennent une branche superlinéaire d'origine A et se terminant par un point au domaine duquel correspond sur la surface Φ_{t+2i-1} une droite $\gamma_{2\ t+2i-1}$.

Sur la surface Φ_{t+2i-1} se trouvent donc trois droites $\gamma_{1i}, \gamma_{2\ t+2}$ et $\gamma_{2\ t+2i-1}$.

20. Passons à l'examen au système $| C_0^{t+2i} |$ dont les courbes passent $3t + 3i$ fois par A et ont $2t + 2i$ tangentes confondues avec a et $t + i$ avec b.

Les courbes de ce système passent $2i + 2$ fois par $(\alpha, 1)$ et une fois par les points $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, t - 2)$, au domaine duquel correspond sur la surface Φ_{t+2} la droite γ_{1t}. Ces courbes passent $2i + 1$ fois par les points $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, x)$, y fois par $(\alpha, x + 1)$ et on doit avoir

$$(2i + 2) + (2i + 1)(x - 1) + y = 3t - 3i - 1,$$

c'est-à-dire

$$(2i + 1)x + y = 3t - 3i - 1.$$

Cette équation est l'équation (1) du n° 16 où l'on a remplacé i par $i + 1$. Les courbes ont donc en commun une branche superlinéaire d'origine A se terminant par un point simple au domaine duquel correspond sur la surface Φ_{i+1} la droite $\gamma_{1\,i+1}$.

Les courbes C_0^{t+2i} passent $t + i$ fois par le point $(\beta, 1)$ et si $5i$ est inférieur à $t - 1$, $t + i$ fois par $(\beta, 2)$ et $t - 5i - 1$ fois par $(\beta, 3)$. Si au contraire $5i$ est supérieur à $t - 1$, elles passent $2t - 4i - 1$ fois par le point $(\beta, 2)$. Dans tous les cas, elles ont en commun avec les courbes C_0^{t+2i-1} une branche superlinéaire d'origine A se terminant en un point au domaine duquel correspond la droite $\gamma_{2\,t+2i-1}$.

Sur la surface Φ_{t+2i} se trouvent donc trois droites $\gamma_{1t}, \gamma_{1\,i+1}$ et la droite $\gamma_{2\,t+2i-1}$.

21. Observons que la surface Φ_{t+2i-1} contient les droites γ_{1t}, $\gamma_{2\,t+2}, \gamma_{2\,t+2i-1}$ et la surface Φ_{t+2i} la dernière de ces droites. Cette dernière surface est donc la pıojection de la première à partir du point commun aux droites $\gamma_{1t}, \gamma_{2\,t+2}$ sur un byperplan de l'espace ambiant. Ce centre de projection est double biplanaire pour la surface Φ_{t+2i-1} et l'ordre de cette surface est supérieure de deux unités à celui de la surface Φ_{t+2i}.

Remarquons que si $i = t - 1$, les droites γ_{1i+1} et γ_{1t} se confondent.

Supposons $i < t - 1$. Alors d'après les résultats précédents, la surface Φ_{t+2i-2} contient les droites $\gamma_{1t}, \gamma_{2\,t+2}$ ct $\gamma_{2\,t+2i-1}$, tandis que la surface Φ_{t+2i-1} contient les droites $\gamma_{1t}, \gamma_{2\,t+2}, \gamma_{2\,t+2i-1}$. On en conclut que cette dernière surface est la projection de la première à partir d'un point commun aux droites γ_{1t} et $\gamma_{2\,t+2i-1}$. Ce point est donc double biplanaire pour la première surface. L'ordre de la seconde surface est donc inférieur de deux unités à celui de la première.

Ce résultat est en défaut pour $i = t - 1$. En effet, les courbes C_0^{3t-2} passent $6t - 3$ fois par A avec $2t - 2$ tangentes confondues avec a et $t - 1$ avec b. Ces courbes passent deux fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, 2t - 2)$, et par les points $(\beta, 1), (\beta, 1, 1), \ldots,$ $(\beta, 1, t - 2)$, enfin une fois par les points $(\beta, 1, t - 1)$, $(\beta, 1, t - 1, 1)$. On en déduit que le degré du système $|\, C_0^{3t-2} \,|$ est égal à $(6t - 3)$ $(6t - 1)$ et la surface $\Phi\text{È}_{t-2}$ est d'ordre $6n - 3$. Sur cette surface sont tracées la droite $\gamma_{2\,t+2}$ et la droite γ_{1t} comptée deux fois.

Les courbes C_0^{3t-1} passent $6t - 2$ fois par A, une fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 2, 2t - 2)$ et par $(\beta, 1), (\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 4t - 2$. La surface Φ_{3t-1} est d'ordre $6t - 2$. Elle est projetée de la surface Φ_{3t-2} à partir du point commun aux droites γ_{1t} et $\gamma_{2\,t+1}$, qui est simple pour cette surface.

De tout ceci résulte que les surfaces $\Phi_{t+2i-1}, \Phi_{t+2i}$ sont respectivement d'ordres $n - (2t + 4i - 1)$ et $n - (2t + 4i + 1)$. Elles correspondent à la même valeur de i. On suppose naturellement $i < t - 1$.

22. Considérons encore le système $| C_0^{3t-3} |$ dont les courbes passent $6t - 5$ fois par A et ont $2t - 3$ tangentes confondues avec a et $4t - 2$ avec b.

Les courbes du système passent quatre fois par les points $(\alpha, 1)$ et $(\beta, 1)$.

Le point $(\alpha, 1, 1)$ est quadruple pour ces courbes. Supposons $t = 2t'$. Alors les courbes passent quatre fois par les points $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, t' - 2)$ et une fois $(\alpha, 1, t' - 1), (\alpha, 1, t' - 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, t' - 1, 3)$. Si $t = 2t' + 1$, les courbes passent quatre fois par les points $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, t' - 2)$, trois fois par le point $(\alpha, 1, t' - 1)$ et une fois par $(\alpha, 1, t' - 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, t' - 1, 1, 1)$, $(\alpha, 1, t' - 1, 1, 2)$. Dans les deux cas, le nombre de points d'intersection de deux courbes C_0^{3t-3} absorbés par les points $(\alpha, 1 ., (\alpha, 1, 1), \ldots$ est égal à $8t - 12$. Au domaine du point $(\alpha, 1, t'\ 1, 3)$ ou $(\alpha, 1, 1, t' - 1, 1, 2)$ correspond sur la surface Φ_{t+1} une droite $\gamma_{1\,t+1t}$.

Les points $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, t - 2)$ sont quadruples pour les courbes C_0^{3t-3} et les points $(\beta, 1, t - 1), (\beta, 1, t - 1, 1)$ sont doubles pour ces courbes.

Sur la surface Φ_{3t-3} d'ordre $n - (6t - 5)$ se trouvent la droite γ_{1t-1} et la droite $\gamma_{2\,t+2}$ comptée deux fois. Le point commun à ces droites est double pour la surface.

Observons encore que le système $| C_0^{\nu+1} |$ dont les courbes ont un point multiple d'ordre p à tangentes variables en A a pour homologue les sections hyperplanes d'une surface d'ordre $n - (6t - 1)$, projection de la surface Φ_{3t-1} à partir du point commun aux droites $\gamma_{2\,3t}$ et γ_{1t}. Ce point est simple pour la surface Φ_{3t-1} et la droite qui correspond sur cette surface au point $(\beta, 1, 4t - 2)$ a le degré virtuel égal à -1.

De l'analyse précédente, il résulte que le point de diramation A′ est équivalent à l'ensemble de $3t$ courbes rationnelles dont l'une, γ_{11}, a le degré virtuel -3 et les autres, le degré virtuel -2.

23. Il nous reste à traiter les cas $t \leqslant 5$. Les cas $t = 1$ et $t = 2$ se traitant sans difficulté.

Dans le cas $p = 5$, les courbes C_0^1 ont un point triple en A, passent deux fois par $(\alpha, 1)$ et une fois par $(\beta, 1), (\beta, 2)$. Les courbes C_0^2 ont un point quadruple en A, passent une fois par $(\alpha, 1)$ et une fois par $(\beta, 1), (\beta, 1, 1), (\beta, 1, 2)$. Il y a trois composantes du point de diramation A′: la conique γ_{11}, les droites γ_{21}, γ_{22}, mais la seconde est de degré virtuel -1.

Dans le cas $p = 11$, les courbes C_0^1 passent trois fois par A, deux fois par $(\alpha, 1), \ldots$- $(\alpha, 4)$, une fois par $(\beta, 1), \ldots, (\beta, 8)$. Les courbes C_0^2 passent six fois par A, deux fois par $(\alpha, 1)$, une fois par $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 4)$ et par $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1{,}4)$, deux fois par $(\beta, 1), (\beta, 2)$, une fois par $(\beta, 3), (\beta, 3, 1)$.

Les courbes C_0^3 passent 7 fois par 4, une fois par $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 4)$, 4 fois par $(\beta, 1)$, deux fois par $(\beta, 1{,}1), (\beta, 1, 1, 1)$.

Les courbes C_0^4 passent 9 fois par A, deux fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1), (\alpha, 1, 2)$, deux fois par $(\beta, 1)$, une fois par $(\beta, 1, 1)$ et $(\beta, 1, 1, 1)$.

Enfin les courbes C_0^5 passent 10 fois par A et une fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 1, 1), (\alpha, 1, 2), (\beta, 1), (\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 6)$.

Il y a cinq composantes du point A′: La conique γ_{11} et la droite γ_{12} qui correspondent respectivement aux domaines des points $(\alpha, 4)$, $(\alpha, 1, 2)$ et les droites $\gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_{23}$ qui correspondent respectivement aux domaines des points $(\beta, 8), (\beta, 3, 1), (\beta, 1, 1, 1)$. Au domaine du point $(\beta, 1, 6)$ correspond une droite de degré virtuel -1, tandis que les autres droites ont le degré virtuel -2, γ_{11} ayant le degré virtuel -3.

24. Lorsque $t = 3, 4$ ou 5, les t premiers systèmes $|C_0^1|, |C_0^2|, \ldots, |C_0^t|$ se comportent comme dans le cas général. On ne doit donc considérer les systèmes qu'à partir de $|C_0^{t+1}|$.

Supposons $t = 3, p = 17$.

Les courbes C_0^4 passent 10 fois par A, une fois par $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 7)$, six fois par $(\beta, 1)$, deux fois par $(\beta, 1, 1)$, une fois par $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 2, 1)$ et une fois par $(\beta, 2), (\beta, 2, 1), (\beta, 2, 3)$.

Les courbes C_0^5 passent 12 fois par A, 4 fois par $(\alpha, 1)$, une fois par $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, 4), (\alpha, 2), (\alpha, 2, 1), (\alpha, 2, 2)$, 4 fois par $(\beta, 1)$, deux fois par $(\beta, 1, 1)$, une fois par $(\beta, 1, 2), (\beta, 1, 2, 1), (\beta, 2), (\beta, 2, 1), (\beta, 2, 2), (\beta, 2, 3)$.

Les courbes C_0^6 passent 13 fois par A, trois fois par $(\alpha, 1)$, une fois par $(\alpha, 2), (\alpha, 2, 1), (\alpha, 2, 2)$, 4 fois par $(\beta, 1), (\beta, 1, 1)$, 2 fois par $(\beta, 1, 2)$ et $(\beta, 1, 2, 1)$.

Les courbes C_0^7 et C_0^8 se comportent comme dans le cas général.

Le point A′ est équivalent à une conique γ_{11} de degré virtuel -3 à sept droites $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{21}, \gamma_{23}, \ldots, \gamma_{25}$.

25. Supposons $t = 4, p = 23$.

Les courbes C_5^0 passent 13 fois par A, une fois par $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 10)$, 7 fois par $(\beta, 1)$, deux fois par $(\beta, 1, 1), (\beta, 1, 2)$, une fois par $(\beta, 1, 3), (\beta, 1, 3, 1)$, 3 fois par $(\beta, 2)$, deux fois par $(\beta, 2, 1)$, une fois par $(\beta, 2, 1, 1)$ et $(\beta, 2, 1, 1, 1)$.

Les courbes C_0^6 passent 15 fois par A, 4 fois par $(\alpha, 1)$, 3 fois par $(\alpha, 2)$, une fois par $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, 6), (\alpha, 3), (\alpha, 3, 1), (\alpha, 3, 2)$, 5 fois par $(\beta, 1)$, 3 fois par $(\beta, 2)$, 2 fois par $(\beta, 2\ 1)$, une fois par $(\beta, 2, 1, 1), (\beta, 2, 1, 1, 1)$.

Les courbes C_0^7 passent 16 fois par A, 3 fois par $(\alpha, 1), (\alpha, 2)$, une fois par $(\alpha, 3), (\alpha, 3, 1), (\alpha, 3, 2)$, 7 fois par $(\beta, 1)$, 3 fois par $(\beta, 1, 1)$, deux fois par $(\beta, 1, 2)$, une fois par $(\beta, 1, 3), (\beta, 1, 3, 1), (\beta, 1, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 1, 4)$.

Les courbes C_0^8 passent 18 fois par A, 5 fois par $(\alpha, 1)$, 2 fois par $(\alpha, 1, 1)$, une fois par $(\alpha, 1, 2), \ldots, (\alpha, 1, 6), (\alpha, 1, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, 1, 3)$, 5 fois par $(\beta, 1)$, trois fois par $(\beta, 1, 1), (\beta, 1, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 1, 4)$.

Les courbes C_0^9, C_0^{10}, C_0^{11} se comportent comme dans le cas général.

Le point de diramation A′ est équivalent à une conique γ_{11} de degré virtual -3 et à 9 droites $\gamma_{22}, \gamma_{13}, \gamma_{14}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{22}$ de degré virtuel -2.

26. Supposons enfin $t = 5, p = 29$.

Les courbes C_0^6 passent 16 fois par A, une fois par $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 13)$, 8 fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\alpha, 1, 1), (\alpha, 1, 2), (\alpha, 1, 3)$, une fois par $(\alpha, 1, 4)$ et $(\alpha, 1, 4, 1)$, 5 fois par $(\beta, 2)$, une fois par $(\beta, 2, 1)$, $(\beta, 2, 1, 1), \ldots, (\beta, 2, 1, 4)$.

Les courbes C_0^7 passent 18 fois par A, 4 fois par $(\alpha, 1)$, 3 fois par $(\alpha, 2), (\alpha, 3)$, une fois par $(\alpha, 4), (\alpha, 4, 1), (\alpha, 4, 2), (\alpha, 1, 2), \ldots,$

$(\alpha, 1, 8)$, 6 fois par $(\beta, 1)$, 5 fois par $(\beta, 2)$, une fois par $(\beta, 2, 1)$, $(\beta$- 2- 1- 1)- ,,,- $(\beta, 2, 1, 4)$.

Les courbes C_0^8 passent 19 fois par A, 3 fois par $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 3)$, une fois par $(\alpha, 4)$, $(\alpha, 4, 1)$, $(\alpha, 4, 2)$, 9 fois par $(\beta, 1)$, deux fois par $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$, une fois par $(\beta, 1, 4)$, $(\beta, 1, 4, 1)$ et une fois par $(\beta, 2)$, $(\beta, 2, 1), \ldots, (\beta, 2, 6)$.

Les courbes C_0^9 passent 21 fois par A, 6 fois par $(\alpha, 1)$, 2 fois par $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 2, 1)$, une fois par $(\alpha, 2, 2, 1)$, $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, 8)$, 7 fois par $(\beta, 1)$, une fois par $(\beta, 2)$, $(\beta, 2, 1), \ldots, (\beta, 2, 6)$.

Les courbes C_0^{10} passent 22 fois par A, 5 fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 2, 1)$, une fois par $(\alpha, 2, 2)$, $(\alpha, 2, 2, 1)$, 7 fois par $(\beta, 1)$, 5 fois par $(\beta, 1, 1)$, 2 fois par $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$, une fois par $(\beta, 1, 4)$, $(\beta, 1, 4, 1)$, 2 fois par $(\beta, 1, 1, 1)$, une fois par $(\beta, 1, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 1, 1)$, $(\beta, 1, 1, 1, 1)$.

Les courbes C_0^{11} passent 24 fois par A, 5 fois par $(\alpha, 1)$, 4 fois par $(\alpha, 1, 2)$, une fois par $(\alpha, 1, 2), \ldots, (\alpha, 1, 8)$ $(\alpha, 1, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 1, 2)$, 5 fois pa $(\beta, 1)$, 3 fois par $(\beta, 1, 1)$, 2 fois par $(\beta, 1, 1, 1)$, une fois par $(\beta, 1, 1, 1, 1)$ et $(\beta, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Les systèmes $|C_0^{12}|$, $|C_0^{13}|$, $|C_0^{14}|$ se comportent comme dans le cas général.

Le point de diramation A' est équivalent à une conique γ_{11} de degré virtuel -3 et à 13 droites $\gamma_{12}, \ldots, \gamma_{15}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{29}$ de degré virtuel -2.

Liège, le 9 février 1971.