Académie royale de Belgique.

EXTRAIT
du *Bulletin de la Classe des Sciences*
5e série — T. XVIII — Nos 8-9 — 1932

Koninklijke Belgische Academie.

UITTREKSEL
der *Mededeelingen van de Afdeeling Wetenschappen*
5de Reeks — B. XVIII — Nrs 8-9 — 1932

Note sur les congruences W,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Les congruences W dont une nappe focale est une surface réglée ont fait l'objet de travaux très intéressants de C. Segre (1) et d'A. Terracini (2). On sait que la seconde nappe focale de la congruence est une surface réglée ou une surface dont les symptotiques d'un système appartiennent à des complexes linéaires.

A une surface (x) de l'espace ordinaire, on peut attacher une suite de Laplace (3) appartenant à un espace linéaire à cinq dimensions et dont deux surfaces consécutives représentent les tangentes aux symptotiques des deux systèmes de la surface (x). Si cette surface est réglée, ou si les symptotiques

(1) C. SEGRE, Le congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate (*Atti di Torino*, 1907, t. 42). — Sulle congruenze rettilinee W di cui una od ambe le falde focali sono rigate (*ibid.*, 1914, t. 49).

(2) A. TERRACINI, Sulle congruenze W di cui una falda focale è una quadrica (*Scritti mat. of. ad E. d'Ovidio*, Turin, 1918). — Sulle superficie con un sistema di asintotiche in complessi lineari (*Atti di Torino*, 1924, t. 59). — Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari (Appendice au *Trattato di Geometria proiettiva differenziale* de MM. FUBINI et CECH, Bologne, 1926, t. II). — Au sujet des congruences W, voir aussi les travaux du même auteur : Sulla teoria delle congruenze W (*Rendiconti del Istituto Lombardo*, 1927); Nuove ricerche sulle congruenze W (*Atti Istituto Veneto*, 1928, t. 87).

(3) Cette suite a été considérée par MM. Bompiani, Tzitzeica et par nous-même. Voir notre note Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 1927 et 1928) et les notes parues dans le même recueil depuis cette date.

d'un système appartiennent à des complexes linéaires, cette suite de Laplace est terminée et comprend respectivement quatre ou six termes ([1]).

Nous nous proposons, dans cette note, de considérer les congruences W dont une nappe focale est attachée à une suite de Laplace terminée. comptant $2n + 4$ termes. Nous montrerons que la suite de Laplace attachée à l'autre nappe focale de la congruence est terminée et comprend $2n + 2$, ou $2n + 4$, ou $2n + 6$ termes.

1. Considérons les équations

$$\theta^{10} = b\theta_1, \tag{1}$$

$$\theta_1^{01} = a\theta, \tag{2}$$

θ, θ_1, a, b étant des fonctions de deux variables u, v.

Les solutions θ, θ_1 de ces équations satisfont respectivement aux équations de Laplace

$$\theta^{11} - \theta^{10}(\log b)^{01} - ab\,\theta = 0, \tag{3}$$

$$\theta_1^{11} - \theta_1^{01}(\log a)^{10} - ab\,\theta_1 = 0. \tag{4}$$

Considérons $n + 1$ solutions indépendantes $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de l'équation (3) et interprétons-les comme coordonnées projectives homogènes d'un espace linéaire S_n à n dimensions. Le point X $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ décrit une surface (X) sur laquelle les courbes u, v forment un réseau conjugué. Désignons par $x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$ les quantités données par θ_1 dans l'équation (1) lorsqu'on y fait successivement $\theta = x_0, x_1, \ldots, x_n$. Les quantités ainsi trouvées sont les coordonnées d'un point X_1 transformé de Laplace du point X dans le sens des u.

Supposons qu'un point Y de la droite XX_1 décrive un

([1]) Voir notre travail Sur les surfaces donnant lieu, dans l'espace réglé, à une suite de Laplace terminée. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1931.)

réseau conjugué à la congruence (XX_1). On sait que l'on peut poser

$$Y = x^{(1)}_{n+1} X - x_{n+} X_1,$$

x_{n+1} et $x^{(1)}_{n+1}$ satisfaisant aux équations (1), (2).

Cela étant, interprétons $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ comme coordonnées projectives homogènes d'un point X' d'un espace S_{n+1}, et $x^{(1)}_0, x^{(1)}_1, \ldots, x^{(1)}_{n+1}$ comme coordonnées d'un point X'_1 du même espace. Les points X', X'_1, sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Les droites XX', $X_1X'_1$ passent par le point O $(x_0 = x_1 = \ldots x_n = 0)$ et les droites XX_1, $X'X'_1$ se coupent au point Y.

Désignons maintenant par

$$\ldots, X_{-i}, \ldots, X_{-1}, X, X_1, \ldots, X_i, \ldots, \tag{I}$$

$$\ldots, X'_{-i}, \ldots, X'_{-1}, X', X'_1, \ldots, X'_i, \ldots, \tag{II}$$

$$\ldots, Y_{-i}, \ldots, Y_{-1}, Y, Y_1, \ldots, Y_i, \ldots, \tag{III}$$

les suites de Laplace auxquelles appartiennent respectivement les points X, X′, Y, chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. La suite (III) est inscrite dans les suites (I) et (II). La suite (I) est la projection de la note (II) à partir du point O sur l'hyperplan $x_{n+1} = 0$. La suite (III) est la section de la suite (II) par cet hyperplan.

2. Supposons que la suite (I) se termine au point X_{-i} en présentant le cas de Laplace. Si h est l'invariant relatif commun aux équations de Laplace auxquelles satisfont les points X_{-i+1}, X_{-i}, ce cas est caractérisé par $h = 0$. Par suite, la suite (II) se terminera également au point X'_{-i} en présentant le cas de Laplace. X_{-i} et X'_{-i} sont indépendants de u.

Deux cas peuvent se présenter :

1° Les points X_{-i}, X'_{-i} coïncident. Alors le point Y_{-i} coïncide avec le point X_{-i} et la suite (III) se termine en présentant le cas de Laplace. Les trois suites se terminent suivant une même courbe (X_{-i}).

*

2° Les points X_{-i}, X'_{-i} sont distincts. Alors les droites $X_{-i}X_{-i}^{01}$, $X'_{-i}X'^{01}_{-i}$ se coupent au point Y_{-i-1}, qui reste fixe lorsque u varie et qui décrit une courbe (Y_{-i-1}) lorsque v varie. Actuellement encore, la suite (III) se termine en présentant le cas de Laplace, mais les points Y_{-i-1}, X_{-i} sont distincts.

Réciproquement, supposons que la suite (III) se termine au point Y_{-i} en présentant le cas de Laplace. Le point Y_{-i} est indépendant de u et décrit, lorsque v varie, une courbe (Y_{-i}).

Les droites $X_{-i+1}X_{-i}$, $X'_{-i+1}X'_{-i}$ s'appuient toutes deux sur la courbe (Y_{-i}) ; par suite, les points X_{-i}, X'_{-i} coïncident avec Y_{-i}, à moins que les points X_{-i+1}, X'_{-i+1} ne décrivent deux courbes, les suites (I) et (II) se terminant en ces points en présentant le cas de Laplace.

Dans tous les cas, on voit que *si une suite de Laplace se termine dans un sens en présentant le cas de Laplace, une suite inscrite dans la première se termine dans le même sens en présentant le cas de Laplace, et réciproquement.*

3. Soient (x), $(\bar{x})$ les surfaces focales d'une congruence W. Dans la transformation de Guichard ainsi établie entre les surfaces (x) et $(\bar{x})$, les asymptotiques u, v sont conservées.

Désignons par Q l'hyperquadrique d'un espace S_5 représentant les droites de l'espace ordinaire contenant les surfaces (x), $(\bar{x})$. Soient U, V les points de Q qui représentent les tangentes aux asymptotiques xx^{10}, xx^{01} de la surface (x); $\bar{U}$, $\bar{V}$ ceux qui représentent les tangentes aux asymptotiques $\bar{x}\bar{x}^{10}$, $\bar{x}\bar{x}^{01}$ de la surface $(\bar{x})$. On sait que les points U, V, d'une part, les points $\bar{U}$, $\bar{V}$, d'autre part, appartiennent à des suites de Laplace

$$\ldots, U_i, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_i, \ldots, \qquad \text{(IV)}$$

$$\ldots, \bar{U}_i, \ldots, \bar{U}_1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_i, \ldots, \qquad \text{(V)}$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u, qui sont autopolaires par rapport à l'hyperquadrique Q.

Soit J le point de Q qui représente la droite $x\bar{x}$ de la congruence W considérée. Le point J décrit, d'après le théorème de M. Demoulin (¹), un réseau (J) conjugué aux congruences (UV), $(\overline{U}\,\overline{V})$. La surface (J) appartient à une suite de Laplace

$$\ldots,\ J_i,\ \ldots,\ J_1,\ J,\ J_{-1},\ \ldots,\ J_{-i},\ \ldots \qquad \text{(VI)}$$

dont chaque point est le transformé de Laplace du précédent dans le sens des u, qui est inscrite à la fois dans les suites (IV) et (V). Le point J_i appartient aux droites $U_{i-1}U_i$ et $\overline{U}_{i-1}\overline{U}_i$, le point J_{-i} aux droites $V_{i-1}V_i$ et $\overline{V}_{i-1}\overline{V}_i$.

Le point P, pôle par rapport à Q de l'hyperplan $J_2J_1JJ_{-1}J_{-2}$, engendre un réseau conjugué (u, v). Il appartient à une suite de Laplace

$$\ldots,\ P_i,\ \ldots,\ P_1,\ P,\ P_{-1},\ \ldots,\ P_{-i},\ \ldots \qquad \text{(VII)}$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u, polaire de la suite (VI) par rapport à Q. Il en résulte que la suite (VII) est circonscrite aux suites (IV) et (V). Précisément, le point P est l'intersection des droites $U\overline{U}$, $V\overline{V}$; le point P_i est l'intersection des droites $U_i\overline{U}_i$ et $U_{i-1}\overline{U}_{i-1}$, le point P_{-i} celui des droites $V_i\overline{V}_i$ et $V_{i-1}\overline{V}_{i-1}$.

4. Supposons que la suite (IV) se termine au point U_i en présentant le cas de Laplace. Le point U_i ne dépend donc pas de u et engendre, lorsque v varie, une courbe (U_i). Alors la suite (VI) se termine en présentant le cas de Laplace, soit au point J_i, qui coïncide avec U_i, soit au point J_{i+1}, qui appartient à la droite $U_iU_i^{01}$.

La suite (V) doit également se terminer dans le sens des v en présentant les cas de Laplace. Examinons les différents cas qui peuvent se présenter :

1° La suite (VI) se termine au point J_i qui coïncide avec U_i et la suite (V) au point $\overline{U}_i$ qui coïncide également avec U_i.

(¹) Sur les surfaces R. (*C. R.*, 1911, t. 153.)

2° La suite (VI) se termine au point J_i qui coïncide avec U_i et la suite (V) se termine au point $\overline{U}_{i-1}$. Le point $U_i = J_i$ appartient à la droite $\overline{U}_{i-1}\overline{U}_{i-1}^{01}$.

3° La suite (VI) se termine au point J_{i+1} qui appartient à la droite $U_iU_i^{01}$ et la suite (V) se termine au point $\overline{U}_i$. Le point J_{i+1} appartient à la droite $\overline{U}_i\overline{U}_i^{01}$.

4° La suite (VI) se termine au point J_{i+1} de la droite $U_iU_i^{01}$ et la suite (V) au point $\overline{U}_{i+1}$ qui coïncide avec le point J_{i+1}.

Le quatrième cas ne diffère du second que par un changement de notation; on passe du second au quatrième en changeant i en $i+1$ et en permutant les rôles des suites (IV) et (V). Il suffira donc d'examiner le second cas.

Nous nous plaerons dans l'hypothèse où aucune des courbes, suivant lesquelles se terminent les suites (IV) et (V), n'appartient à un hyperplan.

Rappelons que si la suite (IV) se termine au point U_i en présentant le cas de Laplace, sous l'hypothèse qui vient d'être faite, elle se termine dans le sens des u en présentant le cas de Goursat [1]. Précisément, le point V_i, lorsque u varie seule, décrit une courbe plane et le point V_{i+1} une droite $V_{i+1}V_{i+1}^{10}$, conjuguée par rapport à Q de l'espace à trois dimensions $U_iU_i^{01}U_i^{02}U_i^{03}$. La droite $V_{i+1}V_{i+1}^{10}$ décrit, lorsque v varie, une surface réglée dont l'arête de rebroussement est engendrée par le point V_{i+2}.

La courbe engendrée par V_i, lorsque u varie seule, appartient au plan conjugué par rapport à Q du plan $V_iV_i^{01}V_i^{02}$. La courbe engendrée par V_{i-1}, lorsque u varie seule, appartient à l'espace à trois dimensions conjugué de la droite $U_iU_i^{01}$ par rapport à Q. Enfin, lorsque u varie seule, le point V_{i-2} engendre une courbe appartenant à l'hyperplan polaire de U par rapport à Q.

---

(1) Voir notre note Sur les surfaces donnant lieu... (*loc. cit.*).

5. Examinons le premier cas. La suite (VII) étant circonscrite aux suites (IV) et (V) et les droites $P_{i-1}P_i$, P_iP_{i+1} contenant respectivement les points U_{i-1}, $\overline{U}_{i-1}$ et U_i, $\overline{U}_i$, deux cas peuvent se présenter :

a) La suite (VII) se termine en présentant le cas de Laplace au point P_{i+1} qui coïncide avec les points U_i, $\overline{U}_i$, J_i.

b) La suite (VII) se termine au point P_i en présentant le cas de Laplace et la droite $P_iP_i^{01}$ passe par le point U_i.

Dans les deux hypothèses, les suites (IV), (V), (VII) se terminent dans le sens des *u* aux points V_{i+2}, $\overline{V}_{i+2}$, P_{-i-2} en présentant le cas de Goursat et ces points coïncident. Les droites $V_{i+1}V_{i+1}^{10}$, $\overline{V}_{i+1}\overline{V}_{i+1}^{10}$, $P_{-i-1}P_{-i-1}^{10}$ correspondant à une même valeur de *v* coïncident.

Dans l'hypothèse *a*), la suite (VI) se termine au point J_{-i-3} en présentant le cas de Goursat et le point J_{-i-3} coïncide avec V_{i+2}, $\overline{V}_{i+2}$, P_{-i-2}. Pour une même valeur de *v*, la droite $J_{-i-2}J_{-i-2}^{10}$ coïncide avec la droite $V_{i+1}V_{i+1}^{10}$.

Dans l'hypothèse *b*), la suite (VI) se termine au point J_{-i-2} qui appartient à la développable (V_{i+2}). La droite $J_{-i-1}J_{-i-1}^{10}$ est tangente à la courbe engendrée par le point J_{-i-2}.

6. Passons au second cas. La suite (VII), circonscrite à la suite (V), se termine en P_i ou en P_{i+1}. Comme cette suite est également circonscrite à la suite (VI), elle se termine en P_{i-1} ou P_i. On en conclut que la suite (VII) se termine en P_i et que ce point coïncide avec $\overline{U}_{i-1}$.

Les suites (IV) et (VII) se terminent au même point $V_{i+2} \equiv P_{-i-2}$ en présentant le cas de Goursat. Pour une même valeur de *v*, les droites $V_{i+1}V_{i+1}^{10}$ et $P_{-i-1}P_{-i-1}^{10}$ coïncident. Les suites (V) et (VI) se terminent au même point $\overline{V}_{i+1} \equiv J_{-i-2}$ et pour la même valeur de *v*, les droites $\overline{V}_i\overline{V}_i^{10}$ et $J_{-i-1}J_{-i-1}^{10}$ coïncident. Le point J_{-i-2} devant appartenir à la droite $V_{i+1}V_{i+2}$, la courbe $(\overline{V}_{i+1})$ est tracée sur la développable (V_{i+1}).

7. Examinons enfin le troisième cas. Les suites (IV) et (V) se terminent, en présentant le cas de Goursat, aux points distincts V_{i+2}, $\overline{V}_{i+2}$. Les points V_{i+1}, $\overline{V}_{i+1}$ engendrent des développables distinctes ayant respectivement pour arêtes de rebroussement les courbes (V_{i+2}), $(\overline{V}_{i+2})$. La suite (VI) se termine suivant la développable (J_{-i-1}) dont l'arête de rebroussement (J_{-i-2}) appartient aux développables (V_{i+1}), $(\overline{V}_{i+1})$. En effet, la suite (VII) se termine nécessairement au point P_i, suivant le cas de Laplace, la droite $P_i P_i^{01}$ passant par les points U_i, $\overline{U}_i$.

La suite (VII) se termine, en présentant le cas de Goursat, au point P_{-i-3}. La droite $P_{-i-2}P^{10}_{-i-2}$, qui engendre une développable d'arête de rebroussement (P_{-i-3}), passe par les points $V_{i+2}\overline{V}_{i+2}$.

8. Appliquons ce qui précède au cas où la surface (x) est réglée. Supposons, pour fixer les idées, que les génératrices rectilignes de la surface soient les lignes u. Alors la suite (IV) se termine au point U en présentant le cas de Laplace et au point V_2 en présentant le cas de Goursat. Le point V_1 engendre une développable dont l'arête de rebroussement est la courbe (V_2).

Le point J est certainement distinct de U; donc la suite (VI) se termine au point J_1, qui appartient à la droite UU^{01}. La suite (V) se termine au point $\overline{U}$, la droite $\overline{U}\overline{U}^{01}$ passant par J_1, ou au point U_1, qui coïncide alors avec le point J_1.

Dans le premier cas, la surface $(\overline{x})$ est réglée et les génératrices rectilignes de cette surface sont les lignes u. La suite (VII) se termine, d'une part, au point P (cas de Laplace) et, d'autre part, au point P_{-3} (cas de Goursat).

Lorsque u varie seule, U et $\overline{U}$ restent fixes, les points J, V, $\overline{V}$ décrivent des coniques sections de Q par des plans que nous désignerons respectivement par γ_0, γ, $\overline{\gamma}$. Le point J_{-1} décrit la droite $\gamma\bar{\gamma}$, engendrant la développable d'arête de rebroussement (J_{-2}). Les tangentes à la conique (J) découpent, sur la droite $\gamma\bar{\gamma}$, les points J_{-1}; donc les trois plans $\gamma_0, \gamma, \bar{\gamma}$ appartiennent à un même faisceau. Les points de rencontre de la droite $\gamma\bar{\gamma}$ avec l'hyperquadrique Q représentent deux droites de l'espace ordinaire qui, lorsque v varie, engendrent deux surfaces réglées qui sont les nappes focales de la congruence W associée à la première et découverte par C. Segre [1].

Dans le second cas, les courbes u de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires. La suite (V) se termine au point $\bar{V}_3$, arête de rebroussement de la développable engendrée par la droite $V_2V_2^{10}$. La suite (VII) se termine, d'une part, au point $P_1 \equiv U$ (cas de Laplace), d'autre part, au point $P_{-3} \equiv V_3$ (cas de Goursat). La suite (VI) se termine, comme on l'a vu, au point $J_1 \equiv \bar{U}_1$ (cas de Laplace) et au point $J_3 \equiv V_2$ (cas de Goursat).

9. Supposons maintenant que les lignes u de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires. Alors, la suite (IV) se termine au point U_1 en présentant le cas de Laplace. Elle se termine donc, d'autre part, au point V_3 en présentant le cas de Goursat; la droite $V_2V_2^{10}$ engendre la développable dont l'arête de rebroussement est (V_3).

Les cas suivants peuvent se présenter :

1° La suite (VI) se termine en $J_1 \equiv U_1$ et la suite (V) en $\bar{U}$. Alors la surface $(\bar{x})$ est réglée et, aux notations près, on retrouve le cas qui vient d'être considéré.

2° La suite (VI) se termine en $J_1 \equiv U_1$ et la suite (V) en $U_1 \equiv U_1$.

3° La suite (VI) se termine en un point J_2 de la droite $U_1U_1^{01}$ et la suite (V) au point $\bar{U}_1$, la droite $\bar{U}_1\bar{U}_1^{01}$ passant par J_2.

---

(1) Le congruenze rettilinee W... (*loc. cit.*).

4° Les suites (VI) et (V) se terminent en un même point $J_2 \equiv \overline{U}_2$ de la droite $U_1U_1^{01}$.

Dans les second et troisième cas, les courbes u, sur la surface $(\bar{x})$, appartiennent également à des complexes linéaires. Dans le quatrième cas, les tangentes aux courbes v le long d'une courbe u de la surface $(\bar{x})$ appartiennent à un complexe linéaire.

Liége, le 27 juillet 1932.