Travaux récents sur la Balistique rationnelle.

(PREMIÈRE NOTE)

Dans quelques notes parues dans ce recueil (1), nous avons rendu compte des publications italiennes récentes sur la balistique rationnelle, ayant pour auteurs des mathématiciens et écrites à l'occasion de la guerre. Nous nous proposons de poursuivre ce compte rendu, en tenant compte cette fois également de travaux publiés en dehors de l'Italie.

I. — G.-A. BLISS. **L'usage des systèmes adjoints dans le problème des corrections différentielles des trajectoires** (2).

1° *Equations différentielles des variations.* — Prenons comme trièdre de référence un trièdre trirectangle $Oxyz$ formé d'un axe Ox horizontal situé dans le plan de tir, d'un axe vertical Oy et d'un axe horizontal Oz, l'origine O étant l'origine de la trajectoire considérée. Les équations du mouvement du centre de gravité du projectile (dans le problème principal), sont

$$(1)\quad \begin{cases} x'' = -\mathrm{F}.\, x', \\ y'' = -\mathrm{F}.\, y' - g, \\ z'' = o, \end{cases}$$

où F est de la forme

$$\mathrm{F} = \mathrm{G}\,(v)\,\frac{\mathrm{H}\,(y)}{\mathrm{C}} = \mathrm{G}\,(v)\ \mathrm{K}\,(y)\ ;$$

G (v) est la force retardatrice due à la résistance de l'air pour un projectile type se mouvant dans un milieu dont la

(1) L. GODEAUX. — *Revue des publications italiennes récentes sur la balistique rationnelle.* « Bulletin Belge des Sciences Militaires », 1922, pp. 199-206, 363-370, 461-470, 753-760, 891-896.

(2) G.-A. BLISS. — *The use of adjoint systems in the problem of differential corrections for Trajectories.* « Journal of the United States Artillery », septembre 1919.

densité est celle du niveau de la mer ; C est le coefficient balistique ; H (y) est un facteur tenant compte de la diminution de la densité de l'air avec l'altitude ; v est la vitesse tangentielle du projectile

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

En général, on prend

$$\mathrm{H}(y) = e^{-hy},$$

h étant une constante positive.

Considérons maintenant une trajectoire perturbée. A temps constant, les coordonnées d'un point et la vitesse de cette trajectoire seront représentées par

$$\bar{x} = x + \xi,\ \bar{y} = y + \eta,\ \bar{z} = o + \zeta,\ \bar{v}.$$

Plaçons-nous dans l'hypothèse de l'existence d'un vent dont la vitesse, à l'altitude y, a les composantes $w_x(y)$, $w_z(y)$ suivant Ox et Oz, respectivement. Dans ces conditions, la force retardatrice du projectile ne se trouve plus sur la tangente à la trajectoire, la direction de la force retardatrice est donnée par

$$-\bar{x}' + w_x(\bar{y}),\quad -\bar{y}',\quad -\bar{z}' + w_z(\bar{y});$$

elle est relative à la vitesse

$$\mathrm{V} = \sqrt{[\bar{x}' - w_x(\bar{y})]^2 + [\bar{y}']^2 + [\bar{z}' - w_z(\bar{y})]^2}.$$

Les équations différentielles du mouvement sont, pour la trajectoire perturbée,

$$(2)\quad \begin{cases} \bar{x}'' = -(\mathrm{F} + \Delta\,\mathrm{F})\,[\bar{x}' - w_x(\bar{y})], \\ \bar{y}'' = -(\mathrm{F} + \Delta\,\mathrm{F})\,\bar{y}' - g, \\ \bar{z}'' = -(\mathrm{F} + \Delta\,\mathrm{F})\,[\bar{z}' - w_z(\bar{y})], \end{cases}$$

où

$$\mathrm{F} + \Delta\,\mathrm{F} = \mathrm{G}(\mathrm{V})\,[\mathrm{K}(\bar{y}) + \delta\,\mathrm{K}(\bar{y})];$$

le terme $\delta\,\mathrm{K}(\bar{y})$ est introduit pour tenir compte d'une variation possible de $\dfrac{\mathrm{H}(y)}{\mathrm{C}}$, due à une variation $\delta\,\mathrm{H}(y)$ de la densité de l'air et à une variation $\delta\,\mathrm{C}$ du coefficient balistique.

En soustrayant membre à membre les équations (2) et (1), on a, pour les variations ξ, η, ζ, les équations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \xi'' &= -\mathrm{F}[\xi' - w_x(\bar{y})] - [x' + \xi' - w_x(\bar{y})]\,\Delta\mathrm{F}, \\ \eta'' &= -\mathrm{F}\eta' - (y' + \eta')\,\Delta\mathrm{F}, \\ \zeta'' &= -(\mathrm{F} + \Delta\mathrm{F})[\zeta' - w_z(\bar{y})]. \end{aligned}\right.$$

2° *Termes linéaires dans les équations aux variations.* — Dans les équations (3), on négligera, dans les seconds membres, les termes qui ne sont pas du premier ordre, de manière à obtenir une première approximation de la trajectoire perturbée.

On a

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta v = \mathrm{V} - v = x'\,\frac{\xi' - w_x(\bar{y})}{v} + y'\,\frac{\eta'}{v} + \ldots, \\ &\frac{\Delta\mathrm{G}}{\mathrm{G}} = \frac{\mathrm{G}(\mathrm{V}) - \mathrm{G}(v)}{\mathrm{G}(v)} = \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}}\Delta v + \ldots, \\ &\frac{\Delta\mathrm{K}}{\mathrm{K}} = \frac{\mathrm{K}(\bar{y}) + \delta\mathrm{K}(\bar{y}) - \mathrm{K}(y)}{\mathrm{K}(y)} = -h\eta + \frac{\delta\mathrm{K}}{\mathrm{K}} \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{\delta\mathrm{K}(\bar{y}) - \delta\mathrm{K}}{\mathrm{K}}\right) + \ldots, \end{aligned}\right.$$

$\Delta\mathrm{F}$ sera obtenu par la formule

$$\frac{\Delta\mathrm{F}}{\mathrm{F}} = \frac{\Delta\mathrm{G}}{\mathrm{G}} + \frac{\Delta\mathrm{K}}{\mathrm{K}} + \frac{\Delta\mathrm{G}}{\mathrm{G}}\cdot\frac{\Delta\mathrm{K}}{\mathrm{K}} =$$

$$= \frac{\mathrm{G}'}{v\,\mathrm{G}}[x'(\xi' - w_x) + y'\eta] - h\eta + \frac{\delta\mathrm{K}}{\mathrm{K}} + \ldots.$$

Les équations (3) s'écriront d'une manière approchée, sous la forme

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\xi'' = -\mathrm{F}(\xi' - w_x) - \\ &\quad - x'\mathrm{F}\left\{\frac{\mathrm{G}'}{v\,\mathrm{G}}\left[x'\left(\xi' - w_x\right) + y'\eta'\right] - h\eta + \frac{\delta\mathrm{K}}{\mathrm{K}}\right\}, \\ &\eta'' = -\mathrm{F}\eta' - \\ &\quad - y'\mathrm{F}\left\{\frac{\mathrm{G}'}{v\,\mathrm{G}}\left[x'\left(\xi' - w_x\right) + y'\eta'\right] - h\eta + \frac{\delta\mathrm{K}}{\mathrm{K}}\right\}, \\ &\zeta'' = -\mathrm{F}\zeta' + \mathrm{F}w_z. \end{aligned}\right.$$

On supposera encore, dans (5), $w_x(\bar{y})$, $w_z(\bar{y})$ remplacés respectivement par $w_x(y)$, $w_z(y)$.

3° *Système adjoint à un système linéaire.* — Etant donné un système linéaire

$$\begin{aligned}
\xi' &= a_1\,\xi + b_1\,\eta + c_1\,\xi_1 + d_1\,\eta_1 + e_1,\\
\eta' &= a_2\,\xi + b_2\,\eta + c_2\,\xi_1 + d_2\,\eta_1 + e_2,\\
\xi_1{}' &= a_3\,\xi + b_3\,\eta + c_3\,\xi_1 + d_3\,\eta_1 + e_3,\\
\eta_1{}' &= a_4\,\xi + b_4\,\eta + c_4\,\xi_1 + d_4\,\eta_1 + e_4,
\end{aligned}$$

on appelle, pour définition, système adjoint, le système

$$\begin{aligned}
-\lambda' &= a_1\,\lambda + a_2\,\mu + a_3\,\lambda_1 + a_4\,\mu_1.\\
-\mu' &= b_1\,\lambda + b_2\,\mu + b_3\,\lambda_1 + b_4\,\mu_1,\\
-\lambda_1{}' &= c_1\,\lambda + c_2\,\mu + c_3\,\lambda_1 + c_4\,\mu_1,\\
-\mu_1{}' &= d_1\,\lambda + d_2\,\mu + d_3\,\lambda_1 + d_4\,\mu_1.
\end{aligned}$$

On déduit aisément

$$\frac{d}{dt}(\lambda\,\xi + \mu\,\eta + \lambda_1\,\xi_1 + \mu_1\,\eta_1) = \lambda\,e_1 + \mu\,e_2 + \lambda_1\,e_3 + \mu_1\,e_4,$$

d'où, en intégrant de o à T.

$$\Big[\lambda\,\xi + \mu\,\eta + \lambda_1\,\xi_1 + \mu_1\,\eta_1\Big]_o^{\mathrm{T}} = \int_o^{\mathrm{T}}\Big[\lambda\,e_1 + \mu e_2 + \lambda_1\,e_3 + \mu_1\,e_4\Big]dt.$$

Cette formule sera appliquée au système (5). A cet effet, nous l'écrirons sous la forme

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\xi' &= \xi_1 + f_1,\\
\eta' &= \eta_1 + f_2,\\
\zeta' &= \zeta_1 + f_3,\\
\xi_1{}' &= x'\,\mathrm{F}\,h\,y + \mathrm{F}\left(1 + x'^2\frac{\mathrm{G}'}{v\,\mathrm{G}}\right)\xi_1 -\\
&\qquad - x'\,y'\,\mathrm{F}\,\frac{\mathrm{G}'}{v\,\mathrm{G}}\eta_1 + f_4,\\
\eta'_1 &= y'\,\mathrm{F}\,h\,\eta - x'\,y'\,\mathrm{F}\,\frac{\mathrm{G}'}{v\,\mathrm{G}}\xi_1 -\\
&\qquad - \mathrm{F}\left(1 + y'^2\frac{\mathrm{G}'}{v\,\mathrm{G}}\right)\eta_1 + f_5,\\
\zeta'_1 &= -\,\mathrm{F}\,\zeta_1 + f_6,
\end{aligned}\right.$$

moyennant

$$(7)\quad \begin{cases} f_1 = f_2 = f_3 = o, \\ f_4 = \mathrm{F}\left(1 + x'^2 \dfrac{\mathrm{G}'}{v\,\mathrm{G}}\right) w_x - x'\,\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{K}}{\mathrm{K}}, \\ f_5 = x'\,y'\,\mathrm{F}\dfrac{\mathrm{G}'}{v\,\mathrm{G}} w_x - y'\,\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{K}}{\mathrm{K}}, \\ f_6 = \mathrm{F}\,w_z. \end{cases}$$

Nous obtiendrons ainsi la formule

$$(8)\quad \begin{cases} \Big[\lambda\,\xi + \mu\,\eta + \nu\,\zeta + \lambda_1\,\xi' + \mu_1\,\eta' + \nu_1\,\zeta'\Big]_o^{\mathrm{T}} = \\ \qquad = \displaystyle\int_o^{\mathrm{T}} \Big[\lambda\,f_1 + \mu\,f_2 + \nu f_3 + \lambda_1 f_4 + \mu_1 f_5 + \nu_1 f_6\Big] dt. \end{cases}$$

(La définition du système adjoint a été donnée pour un système de quatre équations, pour plus de simplicité ; le système (6) possède six équations, mais il est aisé de passer de l'un à l'autre).

4° *Applications aux trajectoires.* — Soient X la portée horizontale et T le temps de la trajectoire primitive. Au temps T, le projectile sera arrivé, sur la trajectoire perturbée, au point $(\mathrm{X} + \xi, \eta, \zeta)$. La différence de portée peut s'écrire approximativement sous la forme

$$(9)\qquad \Delta\,\mathrm{X} = \Big[\xi + \eta \operatorname{cotg} \omega\Big]_{t = \mathrm{T}'}$$

ω étant l'angle de chute.

Le système adjoint aux équations (6) étant

$$(10)\quad \begin{cases} \lambda' = o,\ \mu' = -\,h\,\mathrm{F}\,(x'\,\lambda_1 + y'\,\mu_1),\ \nu' = o, \\ \lambda'_1 = -\,\lambda + \mathrm{F}\left(1 + x'^2 \dfrac{\mathrm{G}'}{v\,\mathrm{G}}\right)\lambda_1 + x'\,y'\,\mathrm{F}\dfrac{\mathrm{G}'}{v\,\mathrm{G}}\mu_1, \\ \mu'_1 = -\,\mu + x'\,y'\,\mathrm{F}\dfrac{\mathrm{G}'}{v\,\mathrm{G}}\lambda_1 + \mathrm{F}\left(1 + y'^2\dfrac{\mathrm{G}'}{v\,\mathrm{G}}\right)\mu_1, \\ \nu'_1 = -\,\nu + \mathrm{F}\,\nu_1, \end{cases}$$

considérons l'intégrale qui, pour $t = \mathrm{T}$, prend les valeurs initiales $\lambda = 1$, $\mu = \operatorname{cotg} \omega$, $\nu = o$, $\lambda_1 = o$, $\mu_1 = o$, $\nu_1 = o$. Alors, on a, quel que soit t, $\lambda = 1$, $\nu = o$, $\nu_1 = o$. La formule (8) donne actuellement

$$(11)\left\{\begin{aligned} &\Delta \mathrm{X} = \Big[\xi + \eta \operatorname{cotg} \omega\Big]_{t=\mathrm{T}} = \Big[\lambda_1 \xi' + \mu_1 \eta'\Big]_{t=o} + \\ &+ \int_o^{\mathrm{T}} \left\{ \mathrm{F}\left(1 + x'^2 \frac{\mathrm{G}'}{v\,\mathrm{G}}\right)\lambda_1 + x'y'\,\mathrm{F}\frac{\mathrm{G}'}{v\,\mathrm{G}}\mu_1 \right\} w_x\, dt \\ &\qquad + \int_o^{\mathrm{T}} \mathrm{F}\,(x'\lambda_1 + y'\mu_1)\frac{\delta \mathrm{K}}{\mathrm{K}}\, dt. \end{aligned}\right.$$

Considérons maintenant l'intégrale du système (6) qui, pour $t = \mathrm{T}$, prend les valeurs initiales $\lambda = o$, $\mu = o$, $\nu = 1$, $\lambda_1 = o$, $\mu_1 = o$, $\nu_1 = o$. On a alors, quel que soit t, $\lambda = o$, $\mu = o$, $\nu = 1$, $\lambda_1 = o$, $\mu_1 = o$ et la formule (8) donne

$$(12) \qquad \begin{aligned} \zeta(\mathrm{T}) &= \Big[\nu_1 \zeta'\Big]_{t=o} + \int_o^{\mathrm{T}} \nu_1 \zeta' \,\mathrm{F}\, w_z\, dt = \\ &= \Big[\nu_1 \zeta'\Big]_{t=o} + \int_{to}^{\mathrm{T}} (\nu'_1 + 1)\, \zeta' w_z\, dt. \end{aligned}$$

5° *Corrections dues à la rotation de la terre.* — La même méthode permet d'obtenir une première approximation des corrections dues à la rotation de la terre. Les équations différentielles de la trajectoire perturbée sont cette fois

$$\begin{aligned} \bar{x}'' &= -(\mathrm{F} + \Delta \mathrm{F})\,\bar{x}' + 2\Omega(\bar{y}' \cos \Phi \sin \alpha - \bar{z}' \sin \Phi), \\ \bar{y}'' &= -(\mathrm{F} + \Delta \mathrm{F})\,\bar{y}' - g - 2\Omega \cos \Phi\,(\bar{z}' \cos \alpha + \bar{x}' \sin \alpha), \\ \bar{z}'' &= -(\mathrm{F} + \Delta \mathrm{F})\,\bar{z}' + 2\Omega(\bar{x}' \sin \Phi + \bar{y}' \cos \Phi \cos \alpha), \end{aligned}$$

où Φ est la latitude du point O, α l'azimuth du plan de tir mesuré vers le sud, et $\Omega = 0{,}0000729$ la vitesse angulaire de la rotation de la terre en radians par seconde.

Les équations aux variations sont actuellement

$$\begin{aligned} \xi'' &= -\mathrm{F}\xi' - x'\,\mathrm{F}\left\{\frac{\mathrm{G}'}{v\mathrm{G}}\Big(x'\xi' + y'\eta'\Big) - h\eta\right\} + 2\Omega y' \cos\Phi \sin\alpha, \\ \eta' &= -\mathrm{F}\eta' - y'\,\mathrm{F}\left\{\frac{\mathrm{G}'}{v\mathrm{G}}\Big(x'\xi' + y'\eta'\Big) - h\eta\right\} - 2\Omega x' \cos\Phi \sin\alpha, \\ \zeta'' &= -\mathrm{F}\zeta' + 2\Omega\,(x' \sin\Phi + y' \cos\Phi \cos\alpha). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\Delta X = 2\,\Omega \cos \Phi \sin \alpha \int_o^T (\mu_1 \lambda_1 - x'\, \mu_1)\, dt,$$

$$\zeta(T) = 2\,\Omega \sin \Phi \int_o^T \nu_1\, x'\, dt + 2\,\Omega \cos \Phi \cos \alpha \int_o^T \nu_1\, y'\, dt.$$

6° *Applications des formules précédentes.* — Dans ce dernier paragraphe, M. Bliss applique ses formules générales à différents cas :

1) Variation Δv_o de la vitesse initiale v_o. On a

$$\Delta X = [\lambda_1(o) \cos \theta_o + \mu_1(o) \sin \theta_o]\, \Delta v_o,$$

θ_o étant l'angle de projection. Cette formule s'obtient en posant, dans (11),

$$\xi'(o) = (v_o + \Delta v_o) \cos \theta_o - v_o \cos \theta_o = \Delta v_o \cos \theta_o,$$
$$\eta'(o) = (v_o + \Delta v_o) \sin \theta_o - v_o \sin \theta_o = \Delta v_o \sin \theta_o.$$

2) Variation $\Delta \theta_o$ de l'angle de projection θ_o. On a

$$\Delta X = v_o\, [-\lambda_1(o) \sin \theta_o + \mu_1(o) \cos \theta_o]\, \Delta \theta_o.$$

Pour obtenir cette formule, on pose, dans (11),

$$\xi'_o = - v_o \sin \theta_o\, \Delta \theta_o,$$
$$\eta'_o = v_o \cos \theta_o\, \Delta \theta_o.$$

3) Correction pour un vent soufflant entre les temps t_1 et t_2 seulement, w_x étant égale à 1 m/s.

$$\Delta X = \Big[t + \lambda_1(t) \Big]_{t_1}^{t_2}.$$

4) Pour une variation de 1 °/₀ de la densité de l'air entre les temps t_1 et t_2, on a

$$\Delta X = \frac{0{,}01}{h}\, [\mu(t_1) - \mu(t_2)].$$

5) Pour une variation de 1 °/₀ du coefficient balistique,

$$\Delta x = \frac{0{,}01}{h}\, [\operatorname{cotg} \omega - \mu(o)].$$

De même, pour un vent soufflant entre les temps t_1 et t_2, pour lequel $w_x = 1$ m/s, on a

$$\zeta(T) = \Big[t + \nu_1(t) \Big]_{t_1}^{t_2}, \quad \nu_1(t) = \frac{X - x(t)}{x'(t)}.$$

M. Bliss établit finalement la correction approchée pour la perturbation due à la rotation de la terre,

$$\zeta(\mathrm{T}) = 2\,\Omega \sin \Phi \int_o^{\mathrm{T}} (\mathrm{X} - x)\, dt +$$
$$+ 2\,\Omega \cos \Phi \cos \alpha \int_o^{\mathrm{T}} (\mathrm{X} - x) \frac{y'}{x'}\, dt.$$

II. — M. PICONE. **L'artillerie italienne dans la guerre mondiale** (1).

Dans une conférence faite à ses élèves, M. Picone, professeur d'analyse à l'Université de Catane et, pendant la guerre, capitaine d'artillerie de complément, a tracé un tableau d'ensemble des divers problèmes qui se sont présentés aux artilleurs italiens durant la guerre. Nous en détachons les considérations suivantes :

1° *Le tir à angle fixe et à charge variable.* — Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires, le premier horizontal, le second vertical, l'origine O étant l'origine des trajectoires, soit

$$\varphi = \Phi(x, y) \qquad (1)$$

l'équation de la trajectoire issue de O sous l'angle de projection φ, la vitesse initiale étant donnée. Lorsque φ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, la courbe (1) décrit une famille de courbes admettant une enveloppe Γ. La forme de cette enveloppe Γ est sensiblement celle d'une parabole d'axe Oy et dont la concavité est tournée vers les y négatifs. La courbe Γ partage le plan Oxy en deux régions dont l'une contient O ; soit R cette région. Par un point (x_o, y_o) de la région R passent en général deux courbes (1) ; ces deux courbes se confondent en une seule, tangente à la courbe Γ au point (x_o, y_o), lorsque ce point est situé sur cette courbe.

Soit

$$\Phi(x, y) = \varphi_o = \Phi(x_o, y_o)$$

une des courbes (1) passant par le point (x_o, y_o). Pour atteindre le point $(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$, on admet que la fonction Φ est différentiable et la correction à apporter à l'angle

(1) M. PICONE. *L'artigliera italiana nella guerra mondiale.* « Esercitazioni matematiche del Circolo matematico di Catania », 1923.

φ_o est, en première approximation, la différentielle $d\ \varphi_o$ assimilée à un accroissement. La correction est donc

$$\Delta\ \varphi_o = \frac{\partial\ \Phi\,(x_o,\ y_o)}{\partial\ x_o}\ \Delta\,x + \frac{\partial\ \Phi\,(x_o,\ y_o)}{\partial\ y_o}\ \Delta y.$$

Mais si le point (x_o, y_o) est très voisin de la courbe Γ, les dérivées partielles $\frac{\partial\ \Phi}{\partial x_o}, \frac{\partial\ \Phi}{\partial\ y_o}$ sont très grandes (et tendent vers l'infini lorsque x_o, y_o s'approche indéfiniment de Γ). Le raisonnement précédent tombe en défaut et effectivement, on constate que les corrections Δx, Δy et $\Delta\ \varphi_o$ ne concordent plus. Or, dans les hautes montagnes (1), il arrivait souvent aux artilleurs de devoir tirer sur des points voisins de l'enveloppe Γ. Pour pouvoir déplacer le tir sans atteindre l'infanterie amie, il fallait trouver un autre procédé de correction.

Un angle de tir étant fixé une fois pour toutes, soit

$$v = \mathrm{V}\,(x, y)$$

l'équation d'une trajectoire de vitesse initiale v. Pour passer du point (x_o, y_o) de cette trajectoire au point $(x_o + \Delta_x,\ y_o + \Delta_y)$, on fera la correction (approchée)

$$d\,v = \frac{\partial\ \mathrm{V}\,(x_o,\ y_o)}{\partial\ x_o}\ \Delta\,x + \frac{\partial\ \mathrm{V}\,(x_o,\ y_o)}{\partial\ y_o}\ \Delta y,$$

ce qui reviendra en fin de compte à faire varier la charge propulsive. Cette méthode a donné de bons résultats et la correction dv calculée comme il vient d'être dit s'est révélée suffisamment approchée.

Le tir à angle fixe et à charge variable a été appliqué couramment par les artilleurs italiens; ceux-ci l'appelaient le « tir des pharmaciens », parce qu'il comportait des commandements tels que + 100 grammes, — 50 grammes,...

Ce procédé de tir, s'il est d'application facile pour les matériels tirant des obus non encartouchés, présente au contraire le grave inconvénient de réduire considérablement la vitesse du tir dans des matériels tels que le 75 m/m, par exemple. Dans ce cas, le tir à charge variable doit être banni et M. Picone rapporte qu'au V[e] corps d'armée, la solution suivante fut adoptée par le général Ferrario : Les canons se portent à découvert, sur la crête montagneuse la plus haute

---

(1) On concevra les difficultés que rencontrèrent les artilleurs italiens en pensant que près du Pasubio, dans une région d'environ 4 kilomètres de diamètre horizontal, se trouvaient des dénivellements de près de 1700 mètres.

et la plus aiguë possible, normale au plus grand nombre possible de plans de tir des batteries ennemies. Il est bien clair que ces conditions remplies diminuaient la vulnérabilité de la batterie.

2° *Stabilité du projectile.* — Le tir à angle fixe et charge variable une fois adopté pour les obusiers et les mortiers, on vit apparaître un grave inconvénient : de fréquents non éclatements. Ces non éclatements étaient d'autant plus fréquents que l'angle de tir était plus grand, que le projectile était plus pesant et la vitesse initiale plus faible. La cause en était un manque de stabilité du projectile sur sa trajectoire, comme M. Picone le montre par le raisonnement suivant. Par suite de la rotation sur lui-même qui est imprimée par les rayures au projectile, l'axe de celui-ci, comme axe principal d'inertie, est axe permanent de rotation et a par suite une tendance à se mouvoir parallèlement à lui-même. Si l'on désigne par λ l'angle fait à un moment donné par l'axe du projectile et la vitesse du centre de gravité G de celui-ci ; dans le vide, cet angle λ deviendrait de plus en plus grand. La valeur de λ serait précisément $\varphi - \theta$, φ étant l'angle de projection et θ l'inclinaison de la tangente à la trajectoire sur l'axe Ox. Dans l'air, dès que λ a acquis une certaine valeur, la force retardatrice provoque un lent mouvement de précession du projectile autour de sa tangente, mouvement qui fait tourner l'axe autour de cette tangente, de sorte que λ reste de beaucoup inférieur à ce qu'il serait dans le vide. On peut donc écrire que, dans l'air, on a $\lambda = \alpha\,(\varphi - \theta)$, α étant une fonction positive de θ, φ, de la vitesse initiale v_o et du coefficient balistique réduit c du projectile, fonction inférieure à l'unité. Dans le vide, on a $c = o$ et $\theta = 1$; par raison de continuité, on peut donc présumer que si c est très petit (donc quand le projectile est très pesant et la vitesse initiale faible), α est voisin de l'unité. Il en résulte que la valeur de λ au point de chute est voisine de $\varphi + \omega$, ω étant l'angle de chute, et cette valeur est donc d'autant plus grande que l'angle de projection φ est plus grand. Or, il est nécessaire, pour l'éclatement du projectile, que celui-ci tombe sur l'ogive, et le raisonnement précédent montre que, lorsque le projectile est très pesant, la vitesse initiale faible et l'angle de projection très grand, il peut fort bien en être autrement.

L'expérience est d'ailleurs venue confirmer ces conclusions.

L. GODEAUX
Professeur d'Analyse à l'Ecole Militaire.