EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, Nos 7-10, 1932.

Sur une propriété de la biquadratique gauche.

par LUCIEN GODEAUX.
Professeur à l'Université de Liége

M. Mentré (1) a établi récemment, par le calcul, qu'une biquadratique gauche pouvait être considérée, d'une infinité de manières, comme l'intersection de deux demi-quadriques appartenant à un même complexe linéaire. Nous nous proposons de donner une démonstration géométrique de ce théorème. Précisément, nous établirons le théorème suivant : *Etant donné un faisceau de quadriques* $|Q|$ *contenant quatre cônes distincts, il existe trois complexes linéaires contenant les génératrices d'un mode d'une quadrique quelconque du faisceau et contenant encore chacun les génératrices d'un mode d'une seconde quadrique du faisceau.*

La méthode utilisée pourrait être appliquée au cas où le faisceau de quadriques ne contient pas quatre cônes distincts.

1. Soient $|Q|$ un faisceau de quadriques contenant quatre cônes distincts, Q_1, Q_2 deux quadriques du faisceau, θ un complexe linéaire. La base de $|Q|$ est une biquadratique gauche elliptique Γ, irréductible.

A un point P, faisons correspondre le point P′ qui lui est conjugué par rapport aux quadriques Q et à θ. Les points P, P′ se correspondent dans une transformation birationnelle involutive T.

(1) Sur les biquadratiques de première espèce. (*A. F. A. S. Congrès de Nancy*, 1931.)

Aux points d'un plan, T fait correspondre ceux d'une surface cubique ; aux points d'une droite, ceux d'une cubique gauche (1).

2. Désignons par Q', Q'' les demi-quadriques ayant pour support la quadrique Q et supposons que θ contienne la demi-quadrique Q_1'. Alors θ contient deux droites, r_1, r_2, de la demi-quadrique Q_1''.

Les plans polaires ϖ_1, ϖ_0 par rapport à Q_1, θ d'un point P de r_1 coïncident. Le plan polaire ϖ_2 de P par rapport à Q_2 coupe ϖ_1 suivant une droite et les points de r_1 sont fondamentaux pour T. Lorsque P décrit r_1, ϖ_1 et ϖ_2 décrivent des faisceaux projectifs et la droite $\varpi_1\varpi_2$ engendre une quadrique Ψ_1. En partant de r_2, on définit de même une quadrique Ψ_2 passant par r_2. Soit K la courbe commune aux quadriques Ψ_1, Ψ_2.

Si A est un point de K n'appartenant pas à Q_1, le plan Ar_1 est tangent à Q_1 en un point R_1 de r_1 et le plan Ar_2 est également tangent à Q_1 en un point R_2 de r_2. Les plans polaires de R_1, R_2 par rapport à θ sont respectivement Ar_1, Ar_2. Les plans polaires de R_1, R_2 par rapport à Q_2 passent par A. Par suite, les plans polaires de A par rapport à Q_1, Q_2, θ passent par R_1R_2 et les points de K sont fondamentaux par T. La droite R_1R_2 ne peut passer par A, car alors elle appartiendrait à Q_1 et il en serait de même de A, contrairement à l'hypothèse.

La courbe K s'appuie en deux points sur chacune des droites r_1, r_2. Supposons que A soit un des points de rencontre ultérieurs de K et de Q_1. Le raisonnement précédent peut être repris, mais actuellement la droite R_1R_2 passe par A. Le plan polaire de A par rapport à Q_2 passe par R_1R_2 et par suite par A ; donc A appartient à Q_2 et par suite à Γ.

Il est facile de voir que le lieu de la droite R_1R_2 est une surface du quatrième ordre, passant deux fois par r_1, r_2 et une fois par K.

3. Supposons que la courbe K puisse se décomposer en quatre droites ; deux, s_1, s_2, ne rencontrant pas r_1, r_2 et ne se rencontrant pas ; les deux autres, t_1, t_2, s'appuyant sur les quatre droites r_1, r_2, s_1, s_2. Les droites s_1, s_2 sont des bisécantes de Γ et il existe par suite une quadrique Q_3 du faisceau $|Q|$ contenant s_1. Cette quadrique Q_3 est distincte de Q_1, car s_1 ne pourrait appartenir à Q_1 sans faire partie de Γ, ce qui est impossible.

Soit A un point de s_1 n'appartenant pas à Γ. Il existe un point

---

(1) Voir L. PAELINCK, Sur une transformation birationnelle involutive de l'espace. (*Mém. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1932, t. XVII.)

R_1 de r_1 et un point R_2 de r_2 tels que les plans polaires de R_1 par rapport à Q_1, θ coïncident et passent par A; les plans polaires de R_2 par rapport à Q_1, θ coïncident et passent par A; les plans polaires de R_1, R_2 par rapport à Q_2 passent par A. Par suite, les plans polaires de R_1, R_2 par rapport à Q_3 passent par A. La droite $R_1 R_2$ ne passe pas par A. Le plan polaire de A par rapport à θ coïncide avec le plan $AR_1 R_2$; le plan polaire de A par rapport à Q_3, c'est-à-dire le plan tangent à Q_3 en A, doit passer par $R_1 R_2$ et par A. Il en résulte que la droite s_1 et la seconde génératrice de Q_3 passant par A appartiennent à θ. Soit Q_3'' la demi-quadrique de support Q_3 contenant s_1. Il résulte de ce qui précède que la demi-quadrique Q_3' appartient à θ. De plus, Q_3'' contient une seconde génératrice appartenant à θ, fondamentale pour T, qui ne peut être que la droite s_2.

Soit maintenant A un point de t_1 n'appartenant pas à une des droites r_1, r_2, s_1, s_2. Soient R_1, R_2 les points de r_1, r_2 construits comme plus haut; S_1, S_2 les points de s_1, s_2 construits d'une manière analogue. Le plan polaire de A par rapport à θ contient les droites $R_1 R_2$, $S_1 S_2$. Les plans polaires de A par rapport à Q_1, Q_3 contiennent respectivement les droites $R_1 R_2$, $S_1 S_2$. Ces trois plans doivent se couper suivant une droite; donc les quatre points R_1, R_2, S_1, S_2 sont en ligne droite. Ils ne peuvent être situés sur t_1, car cette droite appartiendrait à θ, Q_1', Q_3' et ferait partie de Γ, ce qui est impossible; ils sont donc situés sur t_2. On en conclut que les droites t_1, t_2 sont conjuguées par rapport à θ, Q_1, Q_3 et par suite par rapport à toutes les quadriques du faisceau $|Q|$.

Réciproquement, s'il existe deux droites t_1, t_2 conjuguées par rapport à θ et à toutes les quadriques de $|Q|$, la courbe K dégénère en deux droites t_1, t_2 et en deux autres droites s_1, s_2 s'appuyant sur les premières et appartenant à une quadrique de $|Q|$

4. Reprenons le faisceau $|Q|$ et les quadriques Q_1, Q_2. Soient θ_1, θ_2 les polarités par rapport à Q_1, Q_2 et considérons l'homographie $\Omega = \theta_1\theta_2$. Ω possède quatre points unis O_1, O_2, O_3, O_4, sommets des cônes appartenant au faisceau $|Q|$ et formant donc un tétraèdre. Les couples d'arêtes opposées de ce tétraèdre sont conjuguées par rapport à toutes les quadriques du faisceau $|Q|$. Prenons, par exemple, $t_1 = O_1 O_2$, $t_2 = O_3 O_4$. Il existe deux génératrices de la demi-quadrique Q_1'' s'appuyant sur t_1, t_2; soient r_1, r_2 ces génératrices. Il existe un complexe linéaire θ contenant la demi-quadrique Q_1' et les droites r_1, r_2. D'après ce qui précède, ce complexe linéaire θ contient une seconde demi-quadrique ayant comme support une seconde quadrique du faisceau $|Q|$.

Le même raisonnement peut être repris en prenant $t_1 = 0_1 0_3$, $t_2 = 0_2 0_4$ ou $t_1 = 0_1 0_4$, $t_2 = 0_2 0_3$. Ainsi se trouve démontré le théorème énoncé.

Liége, 13 septembre 1932.

MARCEL HAYEZ, Imprimeur, 112, rue de Louvain, Bruxelles.