Revue des publications italiennes récentes sur la balistique rationnelle. (V.)

X. — BURZIO. LA SECONDE APPROXIMATION DE LA SOLUTION DU SECOND PROBLÈME BALISTIQUE (1).

Au sortir de la bouche à feu, le projectile possède une rotation propre, imprimée par les rayures, autour de son axe de figure G A. (Voir *fig. 1*, *Bulletin belge des Sciences militaires*, juin 1922, p. 753.). Le moment résultant de la quantité de mouvement coïncide avec G A. Immédiatement après, sous l'influence du couple perturbateur dû à la résistance de l'air, une seconde rotation d'axe différent se manifeste. La rotation résultante a lieu autour d'un axe instantané de rotation G I, distinct de G A, mais très voisin de celui-ci. Le moment G M de la quantité de mouvement est actuellement distinct de G A et de G I, mais très voisin de G A.

En première approximation, on étudie le mouvement du projectile autour de son centre de gravité en supposant que G A, G I et G M coïncident. En d'autres termes, on attribue à G A le mouvement de G M. C'est l'étude de la précession. En se basant sur les résultats obtenus, on peut donner une seconde approximation en tenant compte du fait que G A et G M ne coïncident pas. C'est l'étude de la nutation.

Pour aborder cette seconde approximation, M. Burzio remarque que le projectile étant de révolution, son ellipsoïde central d'inertie est de révolution également. Il déduit ensuite de la théorie de Poinsot que :

1° Les axes G A, G I, G M sont coplanaires;

2° Le plan diamétral, perpendiculaire à G M, est conjugué de l'axe G I par rapport à l'ellipsoïde central d'inertie.

Par suite, si C est le moment axial d'inertie du projectile, et B son moment d'inertie équatorial, on a

$$\frac{\operatorname{tg} \overline{AGI}}{\operatorname{tg} \overline{AGM}} = \frac{C}{B}.$$

D'autre part, si p, q, r sont les composantes de la vitesse angulaire du projectile, dans son mouvement autour du centre

(1) BURZIO. *La 2ª approssimazione della soluzione del 2° problema balistico.* Atti della R. Accademia di Torino, 1917-1918, t. LIII, pp. 888-895.

de gravité, par rapport aux trois axes principaux d'inertie (les deux premiers étant dans le plan équatorial, l'autre étant l'axe de figure), on a

$$\operatorname{tg} \mathrm{AGI} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r},$$

et par suite

$$\operatorname{tg} \mathrm{AGM} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}} \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r}.$$

La question revient donc à déterminer $\sqrt{p^2+q^2}$, c'est-à-dire la seconde rotation du projectile (produite par le couple perturbateur).

Pour étudier le mouvement du projectile autour de la tangente à la trajectoire de G, rapportons-le à un trièdre trirectangle G $x\,y\,z$, mobile dans l'espace et dans le projectile, tel que : Gx soit perpendiculaire au plan de tir ; Gz soit la tangente à la trajectoire de G ; le plan G $y\,z$ soit le plan de tir.

Ce trièdre est animé d'un mouvement de rotation autour de G x dont l'amplitude $-\frac{d\tau}{dt} = \frac{g \cos \tau}{v}$ est donnée par le problème balistique principal. (Le signe — du premier membre rend compte du fait que l'inclinaison τ de la tangente diminue lorsque le temps t croît.)

L'axe de figure GA est déterminé par l'angle ν que fait le plan de tir avec le plan de résistance, et par l'angle δ de l'axe de figure avec la tangente. Le mouvement de G A est donc défini par les vitesses angulaires $\frac{d\nu}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$.

La vitesse angulaire absolue ω du mouvement du projectile par rapport à G est la somme géométrique des vitesses angulaires r, $\frac{d\nu}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$, $-\frac{d\tau}{dt}$. La projection de ω sur le plan équatorial vaut $\sqrt{p^2 + q^2}$, et est donc égale à la somme des projections sur ce plan des trois dernières vitesses angulaires ci-dessus.

On trouve ainsi :

$$p^2 + q^2 = \left[\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 \sin^2 \delta\right] + \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \left(1 - \sin^2 \nu \sin^2 \delta\right) +$$

$$+ 2 \sqrt{\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 \sin^2 \delta} \times$$

$$\left(-\frac{d\tau}{dt}\right) \sqrt{1 - \sin^2 \nu \sin^2 \delta}. \sin \left(\nu \cos \delta - \operatorname{arctg} \frac{\frac{d\delta}{dt}}{\frac{d\nu}{dt} \sin \delta}\right).$$

Les quantités du second membre sont déterminées par le problème balistique principal, par les formules de Mayevski et (pour δ, ν) par la première approximation du problème.

Il est donc possible de calculer $\sqrt{p^2 + q^2}$ et par suite tg A G M.

Appliquant les résultats précédents au tir sous un grand angle (60°) à faible vitesse initiale (263 m. par sec.), M. Burzio conclut, de la petitesse de l'angle A G M, que l'on peut se contenter de la première approximation, c'est-à-dire considérer le mouvement de G M comme celui de G A.

Note. — Le problème si difficile du mouvement du projectile autour de son centre de gravité a fait l'objet d'une étude très intéressante de M. Haag (1). Dans ce travail, il est notamment tenu compte des perturbations auxquelles est soumis le projectile au départ, perturbations qui ont été négligées dans les recherches de M. Burzio dont il vient d'être rendu compte. Ajoutons que M. Burzio a publié un cinquième travail sur la question (2).

XI. — PUPPINI. TRACÉ APPROCHÉ DES TRAJECTOIRES DES PROJECTILES DANS L'AIR (3).

Dans ce travail, M. Puppini expose une méthode pour construire graphiquement une trajectoire en utilisant une table de tir numérique, problème qu'eurent à résoudre les artilleurs italiens pendant la guerre.

Les procédés utilisés étaient les suivants :

1° L'axe Ox étant horizontal, l'axe Oy vertical et l'origine O étant la pièce, on utilise la formule

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin(\varphi - \varphi_x)\cos(\varphi + \varphi_x)}{\cos^2\varphi},$$

où φ est l'angle de projection de la trajectoire que l'on veut dessiner, φ_x est l'angle de projection de la trajectoire de portée x.

Ce procédé est basé sur l'hypothèse que le coefficient balistique réduit C' est constant aux points de même abscisse sur toutes les trajectoires (correspondant à une même vitesse initiale). Il présente l'inconvénient de ne pas permettre la construction de certains éléments de trajectoires ; par exemple, pour les angles de projection voisins de 45°, on n'obtient que des points d'un parcours très petit en dessous de l'horizon.

---

(1) *Le mouvement des projectiles autour de leur centre de gravité.* Bulletin de renseignements de l'Artillerie, n° 14, 1919.

(2) *Sul moto e sulla stabilita des proietti.* Revista di Artiglieria e di Genio, 1918. (Nous n'avons pu lire ce mémoire.)

(3) V. PUPPINI. *Regola per il tracciamento approssimato di traiettorie di proietli nell' aria.* Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna, 1917-1918, 7e serie, t. V, pp. 15-25.

2° On utilise la formule

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi - \frac{C' f}{2 \cos^2 \varphi},$$

où f est une fonction balistique secondaire.

Ce procédé est basé sur l'hypothèse que le coefficient balistique réduit C' est constant le long d'une même trajectoire et précisément égal à la valeur correspondant au point de chute.

3° On applique le théorème (approché) de l'abaissement : Dans un faisceau de trajectoires relatives à la même vitesse initiale, l'abaissement (distance verticale de la trajectoire à la tangente à l'origine) correspondant à une même longueur mesurée sur la ligne de projection, reste constant lorsque l'angle de projection varie

L'application de ce procédé nécessite la connaissance graphique d'une première trajectoire.

M. Puppini s'est proposé de trouver un procédé simple, facilement utilisable par des personnes peu au courant des mathématiques, plus pratique que les procédés indiqués ci-dessus.

A cet effet, il remarque que les différences principales entre une trajectoire dans le vide et la trajectoire (correspondant aux mêmes conditions initiales) dans l'air sont, pour cette dernière, une portée moindre, un angle de chute plus grand que l'angle de projection, une longueur moindre pour la partie descendante de l'arc que pour la partie ascendante. Mais de telles différences se retrouvent si l'on étudie la trajectoire d'un projectile dans le vide, le champ de gravité étant toujours dirigé verticalement mais ayant une intensité croissante avec l'abscisse x.

Cela étant, soient :

$g = g_1 + g_2 x$ l'accélération du champ de forces substitué à la gravité, g_1 et g_2 étant des constantes ;

V la vitesse initiale ;

φ l'angle de projection ;

x, y, t les coordonnées et le temps de parcours relatifs à un point de la trajectoire, les axes étant disposés suivant l'usage et la pièce se trouvant à l'origine (donc, $x = y = o$ pour $t = o$).

Les équations de la trajectoire sont :

$$x = \mathrm{V}t \cos \varphi,$$

$$y = \mathrm{V}t \sin \varphi - \frac{g_1 t^2}{2} - g_2 \mathrm{V} \cos \varphi \frac{t^3}{6},$$

d'où
$$y = x \operatorname{tg} \varphi - g_1 \frac{x^2}{2\,\mathrm{V}^2 \cos^2 \varphi} - g_2 \frac{x^3}{6\,\mathrm{V}^2 \cos^2 \varphi}.$$

Les constantes g_1, g_2 se déterminent par les conditions

$$x = \mathrm{X}, \quad y = o, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} \omega,$$

X étant la portée (horizontale), ω l'angle de chute. On trouve

$$g_1 = \frac{V^2 \sin 2\varphi}{X}\left(2 - \frac{\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\varphi}\right),$$

$$g_3 = 3\frac{V^2 \sin 2\varphi}{X^2}\left(\frac{\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\varphi} - 1\right),$$

et, par suite,
$$\frac{y}{x} = k \operatorname{tg}\varphi,$$

moyennant
$$k = 1 - \left(2 - \frac{\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\varphi}\right)\frac{x}{X} - \left(\frac{\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\varphi} - 1\right)\frac{x}{X}.$$

Le tracé de la trajectoire nécessite donc l'usage d'une table trigonométrique et celui d'une table à double entrée, très simple à construire, donnant k en fonction de $\frac{x}{X}$ et de $\frac{\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\varphi}$.

La méthode se prête aisément au calcul des points remarquables de la trajectoire, le sommet, par exemple. M. Puppini a eu l'occasion de l'utiliser dans son service au front et a constaté, par la comparaison avec les autres méthodes, qu'elle donne des résultats satisfaisants. On trouvera dans son mémoire différents résultats numériques relatifs au canon de 149 G (1).

XII. — NOTE SUR D'AUTRES TRAVAUX DE BALISTIQUE.

Nous terminerons ici cette revue des publications italiennes récentes sur la balistique rationnelle. Il nous reste cependant quelques travaux à examiner.

Les mathématiciens qui, à l'occasion de la guerre, s'occupèrent de balistique, ont utilisé toutes les ressources de leur science. Je citerai, pour mémoire, les travaux français, bien connus dans notre pays, et particulièrement la méthode dite « méthode G.-H.-M. » (Garnier, Haag, Marcus) (2).

L'un des procédés théoriques utilisés par les mathématiciens est le calcul des variations. Ainsi, M. Picone a utilisé les équations aux variations, dont la théorie est due à H. Poincaré (voir le § V de cette revue). M. Picone a consacré d'autres mémoires à ce genre de recherches (3). Un mathématicien améri-

(1) L'équation de la trajectoire considérée par M. PUPPINI est analogue à la trajectoire de PITON-BRESSANT :

$$y = x \operatorname{tg}\varphi - \frac{gx^2}{2V^2 \cos^2\varphi}\left[1 + AV^2 x\right],$$

où A est une constante, g l'accélération de la pesanteur.

(2) Voir, à ce sujet, le mémoire de M. HAAG : *Sur le calcul des trajectoires et de leurs altérations*. Journal de l'Ecole polytechnique, 1921, 2e série, cahier 21, 52 pages.

(3) Voici la liste des travaux de M. PICONE auxquels nous faisons allusion :

Sul tiro dei medi e dei grossi calibri in montagna. Revista di Artiglieria e Genio, 1917, vol. III-IV, 32 pages.

cain, M. G.-A. Bliss, s'est placé à un point de vue analogue (1). Nous consacrerons prochainement une note aux recherches de MM. Picone et Bliss.

On doit également à M. Signorini plusieurs travaux importants sur les problèmes de la balistique extérieure.

Dans une première note (2), ce géomètre étudie le mouvement d'un projectile constitué par une sphère homogène à laquelle est rigidement fixée une ailette rectangulaire, en tenant compte simultanément du mouvement du centre de gravité du projectile et du mouvement du projectile autour de ce point. Le projectile est supposé dénué de vitesse angulaire initiale; c'est le cas du tir des mortiers de tranchée non rayés.

Dans un second mémoire (3), très important, M. Signorini étudie le problème balistique principal (mouvement du centre de gravité). Il établit un « théorème de comparaison » entre des trajectoires (ou éléments de trajectoires) qui lui permet de résoudre certaines questions importantes. Nous résumerons ce travail de M. Signorini, ainsi qu'un troisième travail du même auteur en cours de publication (4).

ERRATUM : *Bulletin belge des Sciences militaires*, février 1922, p. 202, formule (3), le terme indépendant du second membre *est :* 112,63, *au lieu de :* 111,63.

Lucien GODEAUX,
Lieut. de réserve du 18e Rég[t] d'Artillerie
Professeur à l'Ecole Militaire.

Sul calcolo della perturbazione nel moto dei proietti dovuta al vento. Idem, 1919, vol. III, 46 pages.

Le equazione alle variazioni per cause perturbatrici variabili nel concetto di Volterra di variazione prima per una funzione di linea. Rend. R. Accad. dei Lincei, 2o seria, 1919, pp. 127-131.

Tavole di tiro da montagna, fasc. 1, A. *Descrizione e uso delle tavole*, 1918. Idem., fasc. 1, B. *Teoria e metodi di compilazione*, 1918.

(1) Voici la liste des travaux de M. BLISS :

Differential equations containing arbitrary functions. Transactions of the Amer. Math. Society, 1920, XXI, pp. 79-92.

Functions of lines in Ballistics. Idem, pp. 93-106.

A method of computing differential corrections for a trajectory. Journal of the United States Artillery 1919, LI, p. 445.

The use of adjoint systems in the problem of differential corrections for trajectories. Idem, p. 296.

Differential corrections for anti-aircraft guns (en cours de publication).

(2) *Sul moto dei proiettili di bombarda.* Atti del R. Istituto Veneto, 1917, t. LXXVII, pp. 119-148.

(3) *Un teorema di confronto in balistica esterna ed alcune sue applicazioni.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1918-1919, t. XLIII pp. 357-394.

(4) Dans les Memorie della R. Accademia dei Lincei.