

## Revue des publications italiennes récentes sur la balistique rationnelle. IV.

### VII. — BURZIO. UNE SOLUTION DU PROBLÈME DE LA STABILITÉ DU PROJECTILE (I).

Parmi les problèmes balistiques secondaires, le plus important est sans doute celui du mouvement du projectile autour de son centre de gravité. De la solution de ce problème, on peut, en effet, déduire les conditions de stabilité d'un projectile ogival, sa dérivation, et l'inclinaison à donner aux rayures de la bouche à feu. Dans cette première note, M. Burzio étudie le problème de la stabilité d'un projectile et en fait une application au mortier de 210 en usage dans l'armée italienne.

*Position du problème.* — Considérons un projectile cylindro-ogival (fig. 1). Lorsque le projectile quitte la bouche à feu, son axe de figure  $GA$  coïncide, à moins de causes perturbatrices accidentelles, avec la tangente à la trajectoire de son centre de gravité  $G$ . Cet axe se trouve donc dans le plan de tir. Ensuite, par suite de la courbure de la trajectoire, la tangente s'abaisse, tandis que l'axe de figure du projectile tend à rester parallèle à lui-même par suite de la rotation imprimée par les rayures (effet gyroscopique). La tangente et l'axe de figure font entre eux un certain angle  $\delta$  et déterminent un plan appelé *plan de résistance*.

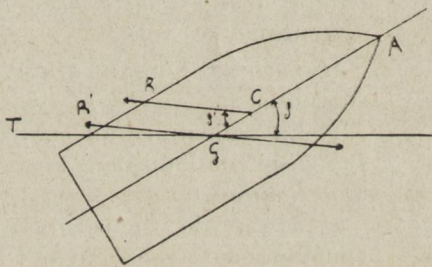


Fig. 1.

Dans les projectiles considérés, le point d'application  $C$  de la résistance  $R$  de l'air est situé sur l'axe de figure, en avant du centre de gravité  $G$ . Si l'on transporte la force  $R$  en  $G$ , on

(I) BURZIO. *Una soluzione del problema della stabilità dei proiettili* (Metodo per la determinazione razionale degli elementi del proiettile e della rigatura). Atti della R. Accademia di Torino, 1916-1917, t. LII, pp. 663-676.

obtient une force  $R'$  et un couple  $\mathfrak{M}$ . La composante tangentielle de  $R'$  est la force retardatrice considérée dans le problème balistique principal. Le couple  $\mathfrak{M}$ , qui tend à écarter l'axe de figure de la tangente à la trajectoire de  $G$ , est appelé *couple perturbateur*.

Posons  $GC = l$  et soit  $\delta_1 = \varphi(\delta)$  l'angle formé par la direction de la force  $R$  et de l'axe de figure du projectile. Pour  $\delta$  suffisamment petit, on peut se limiter au premier terme du développement en série de Taylor de  $\varphi(\delta)$  et poser  $\delta_1 = k\delta$ ,  $\sin \delta_1 = \delta_1 = k\delta$ . En outre, dans cette hypothèse, on peut substituer à  $R$  sa composante tangentielle. On aura alors  $\mathfrak{M} = R \cdot l \cdot \sin \delta_1 = R \cdot l \cdot k\delta_1$  et ensuite

$$\mathfrak{M} = mc F(v) lk\delta,$$

$m$  étant la masse du projectile,  $c F(v)$  l'accélération tangentielle du centre de gravité

Dans cette formule,  $k, l$  sont déterminés par la théorie de la résistance oblique de l'air; le facteur  $mc F(v)$  dépend de l'expérience et des éléments du projectile.

Pour que le mouvement du projectile ne soit pas perturbé, il faut que l'angle  $\delta$  soit toujours très petit; le problème de la stabilité peut donc s'énoncer sous la forme suivante: *Déterminer les éléments des rayures et du projectile de manière à ce que l'angle  $\delta$  ne dépasse pas, pendant le parcours, une valeur déterminée assez petite.*

*Hypothèses simplificatives.* — On fera les deux hypothèses suivantes :

1° La trajectoire du centre de gravité  $G$  du projectile sera supposée contenue dans le plan de tir, ce qui équivaut à négliger la *dérivation*.

2° L'axe de figure du projectile sera supposé coïncider constamment avec l'axe de rotation instantanée du projectile et par suite avec le moment de la quantité de mouvement. Cela équivaut à négliger la *nutaton* (mouvement de l'axe de figure par rapport au moment de la quantité de mouvement) vis-à-vis de la *précession* (mouvement du moment de la quantité de mouvement).

Dans ces hypothèses, le mouvement du point  $M$ , extrémité du moment des quantités de mouvement (qui coïncide avec l'axe de figure) a lieu sur une sphère de centre  $G$  et de rayon  $GM = Cr$ ,  $Cr$  étant le moment initial de la quantité de mouvement. A chaque instant, la vitesse angulaire du point  $M$  est donnée par

$$\frac{\mathfrak{M}}{Cr} = \frac{mlkc\delta F(v)}{Cr} = K\delta,$$

où  $K$  peut être considéré comme connu.

*Résolution du problème.* — Considérons une sphère de centre G et de rayon 1. L'intersection T' de la tangente GT avec cette sphère décrit un grand cercle et l'intersection M' de l'axe de figure GM décrit une courbe qui, si le projectile est stable, reste très voisine de ce grand cercle. Le mouvement des points M', T' sur la sphère considérée est pour T' exactement, pour M' avec une grande approximation, le mouvement des projections de ces points sur le cylindre circonscrit à la sphère le long du grand cercle lieu de T'.

Il s'agit de déterminer la trajectoire de la projection de M' sur ce cylindre, ou sur le plan sur lequel ce cylindre est développé.

On prendra comme axe des  $x$ , le développement du grand cercle lieu de T', comme origine 0 le point de coïncidence initial de T' et M', comme axe des  $y$  un axe perpendiculaire. Les équations du mouvement de la projection de M' sont alors

$$\begin{aligned} K\delta &= \sqrt{x'^2 + y'^2}, \\ \delta &= \sqrt{[x - (\alpha - \tau)]^2 + y^2}, \\ y &= \delta \sin \nu, \\ x' &= K\delta \sin \nu, \end{aligned}$$

où  $\alpha$  est l'angle de projection du projectile,  $\tau$  l'inclinaison de la tangente à la trajectoire,  $\nu$  l'angle du plan de tir et du plan de résistance.

On en déduit, en considérant K comme une constante (égale à la valeur moyenne de K),

$$x = (\alpha - \tau) (1 + \sin Kt), \quad y = \frac{1}{K} x',$$

$t$  désignant le temps.

En pratique, dans les calculs numériques, on utilisera les formules

$$\begin{aligned} \Delta x &= -K \sqrt{2(\alpha - \tau)x - x^2} \frac{v}{g \cos \tau} \Delta \tau, \\ \Delta y &= -K \left[ (\alpha - \tau) - x \right] \frac{v}{g \cos \tau} \Delta \tau. \end{aligned}$$

Des équations précédentes, M. Burzio déduit également ce théorème : *Le maximum de  $\delta$  a lieu lorsque le plan de résistance est normal au plan de tir.*

*Application au mortier de 210.* — M. Burzio a appliqué ses formules au cas du mortier de 210 tirant, sous un angle  $\alpha = 60^\circ$ , avec une vitesse initiale de 263 mètres par seconde, un projectile cylindro-ogival de 101 kg. Ce mortier possède 36 rayures progressives : pas initial, 56 calibres; pas final, 20 calibres.

(L'élevation  $\alpha = 60^\circ$  ne figure pas dans les tables de tir du mortier.)

Il a trouvé ainsi le tableau suivant, où l'inclinaison de la tangente  $\tau$  et l'angle  $\delta$  sont exprimés en degrés :

$\tau$	$\delta$	$\tau$	$\delta$	$\tau$	$\delta$
60°	0	18°	7°80	— 30°	22°75
58°	1°69	12°	7°96	— 36°	36°93
54°	3°85	6°	8°09	— 42°	60°
48°	5°68	0	8°10	— 48°	96°50
42°	6°82	— 6°	8°12	— 54°	151°
36°	7°56	— 12°	8°49	— 60°	265°
30°	7°39	— 18°	10°13		
24°	7°63	— 24°	14°43		

M. Burzio termine par un graphique de la trajectoire de l'extrémité de l'axe de figure du projectile.

Il constate que l'angle  $\nu$  du plan de tir et du plan de résistance se maintient, pendant une grande partie de la trajectoire, voisin de  $\frac{\pi}{2}$ . De plus, il fait remarquer que la même méthode pourrait être appliquée si, par suite de perturbations accidentelles, l'axe de figure du projectile et la tangente à la trajectoire faisaient, au début du mouvement, un angle initial  $\delta_0$  non nul.

#### VIII. — BURZIO. FORMULES RATIONNELLES POUR LE CALCUL DE LA DERIVATION DES PROJECTILES (1).

Lorsque, dans le mouvement d'un projectile cylindro-ogival, l'axe de figure s'écarte de la tangente à la trajectoire, déterminant avec celle-ci le *plan de résistance*, la résistance de l'air  $R$ , appliquée au point  $C$ , est située dans ce plan. Transportons  $R$  en  $R'$  de point d'application  $G$  (centre de gravité), ce qui donne lieu au couple perturbateur  $\mathcal{M}_c$ . La composante tangentielle  $T$  de  $R'$  est la force retardatrice considérée dans le problème balistique principal. Sa composante normale  $N$ , appelée *force*

(1) BURZIO. *Formole razionali per il calcolo della derivazione dei proiettili*. Atti della R. Accademia di Torino, 1916-1917, t. LII, p. 919-930.

*déviatrice*, tend à faire sortir le centre de gravité G du projectile du plan de tir; elle provoque la *dérivation* du projectile.

Si l'on rapporte le projectile à trois axes orthogonaux dont l'origine O coïncide avec le centre de gravité au début du mouvement, l'axe Ox étant horizontal et l'axe de y vertical, mais situés tous deux dans le plan de tir, le problème relatif à la dérivaison consiste à déterminer à chaque instant la troisième coordonnée z du centre de gravité, ou en d'autres termes de déterminer dans les plans des xz la projection de la trajectoire de G (courbe de la dérivaison).

Ce problème est abordé par M. Burzio en tenant compte des résultats de sa première note.

*Observations sur les théories de Charbonnier et de Mayevski.*

— Dans son étude de la dérivaison des projectiles, M. Charbonnier assimile le mouvement du projectile autour de son centre de gravité à celui d'une toupie, en faisant correspondre à la verticale la tangente à la trajectoire et au couple dû à la gravité, celui dû à la résistance de l'air. M. Burzio a montré dans un travail inséré dans la *Rivista di Artiglieria e Genio*, que cela revient à négliger, par rapport au mouvement élémentaire de l'axe de figure, celui d'abaissement de la tangente, c'est-à-dire un infiniment petit par rapport à un infiniment petit du même ordre.

Le même reproche est fait par M. Burzio à la théorie du Général MAYEVSKI (fondée sur les équations classiques d'Euler), ainsi qu'à celle de M. de Sparre.

*Équations de la dérivaison.* — La force déviatrice N est normale à la tangente à la trajectoire de G. On ne peut donc, comme certains auteurs le font, supposer en première approximation N parallèle à Oz; il faut tenir compte de l'angle  $\nu$  fait par le plan de résistance avec le plan de tir et de l'angle  $\eta$  formé par le plan de tir et le plan vertical passant par la tangente à la trajectoire à chaque instant.

D'autre part, la force retardatrice T n'étant pas dans le plan de tir, admet une composante

$$T \cos \tau \sin \eta = m c F(v) \cos \tau \sin \eta$$

suivant Oz. On observa ici que, dans le problème balistique principal, on prend comme force retardatrice tangentielle  $m c F(v)$ , grandeur expérimentale qui est la force retardatrice effective. On commet donc ici une erreur négligeable, étant donné que  $\eta$  est très petit. On commet une autre erreur, également négligeable, en considérant  $\tau$  à la fois comme l'inclinaison de la tangente à la trajectoire réelle et à la trajectoire dans le plan de tir étudiée dans le problème balistique principal.

Ces observations faites, M. Burzio prend comme équation définissant  $z$  (avec les notations du travail précédent),

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mc F \cos \tau \sin \eta + mc F \operatorname{tg} (\delta_1 - \delta) \sin \nu,$$

équation donnée par M. Charbonnier et qui peut s'écrire,  $\eta$  et  $\delta$  étant très petits et  $\delta_1$  étant égal à  $k\delta$ ,

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mc F \eta \cos \tau + mc F \delta (k - 1) \sin \nu.$$

On a  $dz = \eta dx$ , d'où

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \eta \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d\eta}{dt} \frac{dx}{dt}.$$

Le problème balistique principal donne

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -cF \cos \tau, \quad \frac{dx}{dt} = v \cos \tau,$$

donc on a

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{cF\delta (k - 1) \sin \nu}{v \cos \tau}.$$

En tenant compte des méthodes de détermination des quantités  $\delta$  et  $\nu$  exposées dans la note précédente, on pourra déterminer  $\eta$  pour des intervalles successifs suffisamment petits, dans lesquels les quantités figurant dans le second membre pourront être supposées constantes. En partant de  $\frac{dz}{dx} = \eta$ , on pourra de même rechercher les valeurs de  $z$ .

*Application au mortier de 210* — En appliquant sa méthode au cas de la trajectoire de l'obus de 210 considérée dans le premier article, M. Burzio a trouvé le tableau suivant :

$\tau^\circ$	$z$ (mètres).	$\tau$	$z$	$\tau$	$z$
60°	0	18'	15,06	— 30"	49,65
58°	0,0014	20"	18,36	— 36°	56,74
54°	0,175	6°	21,79	— 42°	64,27
48°	1,282	0°	25,40	— 48°	68,95
42°	3,30	— 6°	29,27	— 54°	52,35
36°	5,89	— 12°	33,49	— 60°	— 79,15
30°	8,79	— 18°	38,18		
24°	11,87	— 24°	43,50		

On observera que, les dernières valeurs de  $z$  correspondant à la phase de renversement du projectile et ne peuvent plus être prises en considération.

IX. — BURZIO. SUR QUELQUES FORMULES DE MAYEVSKI (1).

Le second problème secondaire de la Balistique extérieure, c'est-à-dire l'étude du mouvement du projectile autour de son centre de gravité  $G$ , présente quelques analogies avec celui du mouvement de la toupie. A la verticale passant par un point fixe de ce dernier, on fait correspondre la tangente en  $G$  à la trajectoire. Les différences entre ces problèmes consiste en ce que, dans le premier, la tangente est mobile, dans le second, la verticale est fixe; dans le premier, la résistance de l'air est variable, dans le second, la pesanteur peut être considérée comme de grandeur fixe. Ce sont ces différences qui ont conduit certains auteurs à des résultats peu approchés lorsqu'ils ont assimilé ces mouvements. M. Burzio indique une méthode rigoureuse pour traiter la question.

La tangente est douée d'un mouvement d'abaissement de vitesse angulaire  $-\frac{d\tau}{dt}$  ( $\tau$ , inclinaison de la tangente, étant fournie par le problème principal). Si l'on considère des axes rectangulaires  $Gx$ ,  $Gy$ ,  $Gz$ , mobiles dans l'espace et dans le projectile, l'axe  $Gx$  étant perpendiculaire au plan de tir et  $Gz$  étant parallèle à la tangente, le trièdre  $Gxyz$  possède donc un mouvement de rotation connu, autour de  $Gx$ , de vitesse angulaire  $-\frac{d\tau}{dt}$ . Les composantes, sur les axes  $Gx$ ,  $Gy$ ,  $Gz$  de :

1° La vitesse angulaire du trièdre, sont

$$-\frac{d\tau}{dt}, \quad 0, \quad 0;$$

2° Le moment de la quantité de mouvement du projectile, sont

$$Cr \sin \delta \sin \nu, \quad Cr \sin \delta \cos \nu, \quad Cr \cos \delta;$$

3° Le moment  $\mathfrak{M}$  du couple perturbateur, sont

$$\mathfrak{M} \cos \nu, \quad -\mathfrak{M} \sin \nu, \quad 0.$$

(1) BURZIO. *Sopra alcune formole del Mayevski relative al 2° problema balistico fondamentale*. Atti della R. Accademia di Torino, 1917-1918, t. L. III, pp 603-607.

Par suite, on a les équations :

$$\begin{aligned} Cr \frac{d(\sin \delta \sin \nu)}{dt} &= \mathfrak{M} \cos \nu, \\ Cr \frac{d(\sin \delta \cos \nu)}{dt} + \frac{d\tau}{dt} Cr \cos \delta &= -\mathfrak{M} \sin \nu, \\ -Cr \sin \delta - \frac{d\delta}{dt} Cr \sin \delta \cos \nu &= 0. \end{aligned}$$

Pour arriver à ces équations, M. Burzio suppose que l'axe de figure du projectile et le moment de la quantité de mouvement coïncident et il applique alors les équations classiques de la mécanique.

Des équations précédentes, on déduit sans peine

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{d\tau}{dt} \cos \nu, \\ \frac{d\nu}{dt} &= \frac{\mathfrak{M}}{Cr \sin \delta} - \frac{tg \nu}{tg \delta} \frac{d\delta}{dt}. \end{aligned}$$

Ce sont les équations trouvées par le Général Mayevski (Traité de Balistique extérieure, p. 172), mais obtenues ici d'une manière plus rigoureuse.

Les quantités  $\frac{d\nu}{dt}$ ,  $\frac{d\delta}{dt}$  sont les vitesses angulaires de *précession* et de *nutation*.

De ces formules, on déduit immédiatement que :

I. *Le maximum de l'angle  $\delta$  a lieu lorsque le plan de résistance est perpendiculaire au plan de tir.*

II. *La vitesse de précession n'est pas indépendante de la nutation.*

III. *La vitesse de nutation est inférieure à la vitesse d'abaissement de la tangente.*

(A suivre.)

Lucien GODEAUX,  
Lieut. de réserve du 18<sup>e</sup> Rég<sup>t</sup> d'Artillerie  
Professeur à l'Ecole Militaire.

