Académie royale de Belgique. | Koninklijke Belgische Academie.

EXTRAIT
du *Bulletin de la Classe des Sciences*
5e série – T. XVIII – Nos 8-9 – 1932

UITTREKSEL
der *Mededeelingen van de Afdeeling Wetenschappen*
5de Reeks – B. XVIII – Nrs 8-9 – 1932

Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique régulière,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Nous nous proposons, dans cette note, d'établir quelques théorèmes sur les systèmes canoniques et pluricanoniques de la surface image d'une involution cyclique dépourvue de points unis, appartenant à une surface algébrique régulière. L'intérêt de la question réside dans le fait que l'on peut arriver par cette voie à construire des surfaces algébriques régulières dépourvues de courbes canoniques, mais possédant des courbes bicanoniques effectives [1]. Nous nous limiterons au cas où l'ordre de l'involution est un nombre premier, le cas où ce nombre n'est pas premier s'y ramenant.

1. Soit F une surface algébrique régulière de genres géométrique et arithmétique $p_g = p_a$, de genre linéaire $p^{(1)}$, contenant une involution cyclique I_p, dépourvue de points unis, d'ordre premier p.

Au sujet du système canonique $|C|$ de F, nous ferons les hypothèses suivantes :

1° Le système $|C|$ n'est pas composé au moyen de l'involution I_p, ce qui implique

$$p_a > 1.$$

2° Si le système $|C|$ est un faisceau ($p_a = 2$), les systèmes

[1] Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux (*Rend. della R. Accad. dei Lincei*, déc. 1931); Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro dont le genre linéaire est égal à deux (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 1932, pp. 26-37).

pluricanoniques de F ne sont pas composés au moyen de ce faisceau, ce qui implique

$$p^{(1)} > 1.$$

Désignons par Φ une surface image de l'involution I_p, par π_g, π_a, $\pi^{(1)}$ ses genres géométrique, arithmétique et linéaire. La surface Φ est régulière et l'on a $\pi_g = \pi_a$. On a les relations (¹)

$$p_a + 1 = p(\pi_a + 1),$$
$$p^{(1)} - 1 = p(\pi^{(1)} - 1).$$

Le système $|C|$ contient un certain nombre $\nu > 1$ de systèmes linéaires partiels $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_\nu|$ composés au moyen de l'involution I_p. Si $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ sont les dimensions de ces systèmes, on a

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_\nu + \nu = p_a = p(\pi_a + 1) - 1. \qquad (1)$$

Aux systèmes $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_\nu|$ correspondent, sur Φ, des systèmes $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_\nu|$ de dimensions $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$, de degré $\pi^{(1)} - 1$ et de genre $\pi^{(1)}$.

2. Supposons en premier lieu qu'il existe sur Φ un système canonique effectif, c'est-à-dire que l'on ait $\pi_a > 0$ et par suite $p_a > p$. Au système canonique de Φ correspond sur F un système formé de courbes canoniques C; supposons que ce soit $|C_1|$. Le système canonique de Φ est donc $|\Gamma_1|$ et l'on a

$$r_1 = \pi_a - 1.$$

La relation (1) donne

$$r_2 + r_3 + \cdots + r_\nu + \nu = (p - 1)\pi_a + p. \qquad (2)$$

Les courbes des systèmes $|\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_\nu|$ rencontrent les

(¹) SEVERI, Sulle relazioni che legano i carrateri... (*Rend. Ist. Lomb.*, 1903). — Voir aussi, pour le cas particulier considéré ici, nos Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence... (*Bull. de la Soc. Math. de France*, 1919).

courbes Γ_1 en $\pi^{(1)} - 1$ points et sont certainement non spéciales. On a donc, par le théorème de Riemann-Roch,

$$r_i \geq \pi_a > r_1, \qquad (i = 2, 3, ..., \nu)$$

Si $\pi_a > 0$, *le système canonique de* Φ *est celui des systèmes* $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \dots, |\Gamma_\nu|$ *qui a la dimension minimum.*

3. Supposons que l'on ait $\nu = p$. On a nécessairement $p_a \geq p$ et par suite $\pi_a > 0$. Les considérations précédentes sont donc applicables et en supposant toujours que $|\Gamma_1|$ est le système canonique de Φ, on aura, par la formule (2),

$$r_1 = \pi_a - 1, \quad r_2 = r_3 = \cdots = r_p = \pi_a.$$

Le bigenre Π_2 de la surface Φ est égal à $\pi_a + \pi^{(1)}$.

Considérons par exemple dans S_4 l'homographie

$$\frac{x_0'}{x_0} = \frac{x_1'}{\varepsilon x_1} = \frac{x_2'}{\varepsilon x_2} = \frac{x_3'}{\varepsilon^2 x_3} = \frac{x_4'}{\varepsilon^2 x_4},$$

où ε est une racine primitive cubique de l'unité, et deux hypersurfaces cubiques transformées en elles-mêmes par cette homographie, ne passant ni l'une ni l'autre par le point $(1, 0, 0, 0, 0)$ et rencontrant les droites

$$x = x_3 = x_4 = 0, \qquad x_0 = x_1 = x_2 = 0$$

en des points distincts. L'intersection F de ces deux hypersurfaces est une surface canonique, de genres $p_g = p_a = 5$, $p^{(1)} = 10$ (¹). Sur cette surface, l'homographie considérée détermine une involution I_3, d'ordre trois, privée de points unis. Si l'on désigne respectivement par C_1, C_2, C_3 les courbes découpées sur F par les hyperplans

$$x_0 = 0, \qquad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0, \qquad \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0,$$

sur la surface Φ, image de I_3, de genres $\pi_g = \pi_a = 1$, $\pi^{(1)} = 4$, la courbe canonique est Γ_1 et les courbes $2\Gamma_1$, $\Gamma_2 + \Gamma_3$ sont les

(¹) F. Enriques, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, rédigées par L. Campedelli (Padoue, 1932). Voir p. 325.

courbes bicanoniques. Les courbes Γ_2, Γ_3 forment des faisceaux $|\Gamma_2|, |\Gamma_3|$. Le bigenre est $\Pi_2 = 5$.

4. Envisageons maintenant l'hypothèse

$$\pi_a = 0, \qquad p_a = p - 1.$$

La surface Φ est dépourvue de courbe canonique. On a, d'après les hypothèses, $\pi^{(1)} > 1$ et par suite le bigenre Π_2 de Φ est supérieur à zéro. La relation (1) donne

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_\nu = p - \nu - 1 \tag{3}$$

et par suite on a $\nu \leq p - 1$. On ne peut donc avoir $p = 2$, puisque, par hypothèse, $|C|$ n'est pas composé au moyen de I_p et que par suite on a $\nu > 1$.

Le système $|\Gamma_1'|$, adjoint à $|\Gamma_1|$, a pour transformé, sur F, un système composé au moyen de I_p et appartenant à $|2C|$. Le système $|\Gamma_1'|$ comprendra donc des courbes de la forme $\Gamma_i + \Gamma_k$, qui ont pour homologues, sur F, des courbes $C_i + C_k$ du système $|2C|$, mais il ne peut comprendre des courbes telles que $\Gamma_1 + \Gamma_i$, car alors Γ_i serait une courbe canonique de Φ.

Désignons par $|\Delta|$ le système bicanonique de Φ. Sa dimension est $\Pi_2 - 1 = \pi^{(1)} - 1$. Sur une courbe Γ_i, les courbes Δ découpent une série linéaire d'ordre $2\pi^{(1)} - 2$ et de dimension $\pi^{(1)} - 1$; cette série ne peut être la série canonique de la courbe Γ_i, car alors celle-ci serait une courbe canonique de Φ. Il en résulte que la courbe Γ_i appartient comme partie à une courbe Δ. La courbe $\Delta - \Gamma_i$ ne peut être une courbe de $|\Gamma_i|$, car ce système serait le système canonique de Φ; d'autre part, à cette courbe correspond, sur F, une courbe appartenant à l'involution I_p; c'est donc une courbe de l'un des systèmes $|\Gamma_1|, \ldots, |\Gamma_{i-1}|, |\Gamma_{i+1}|, \ldots, |\Gamma_\nu|$. Nous pouvons poser, par un choix convenable des notations,

$$|\Delta| = |\Gamma_1 + \Gamma_2| = |\Gamma_3 + \Gamma_4| = \cdots = |\Gamma_{\nu-1} + \Gamma_\nu|.$$

Il en résulte que ν *est nécessairement pair*.

5. Commençons par examiner le cas $\nu = 2$. On a nécessairement

$$|\Gamma_1'| = |2\Gamma_2|, \qquad |\Gamma_2'| = |2\Gamma_1|;$$

d'où

$$|\Gamma_1'' - \Gamma_1| = |\Gamma_2'' - \Gamma_2| = |\Gamma_2 + \Gamma_2' - \Gamma_1| = |\Gamma_1 + \Gamma_2|,$$

ce qui confirme le raisonnement précédent.

6. Supposons maintenant $\nu > 2$. Le système $|\Gamma_1'|$ peut contenir une des courbes $2\Gamma_2, 2\Gamma_3, \ldots, 2\Gamma_\nu$, ou non. Plaçons-nous dans la première hypothèse et supposons

$$|\Gamma_1'| = |2\Gamma_i|.$$

L'adjoint $|\Gamma_i'|$ de $|\Gamma_i|$ doit contenir Γ_1. Supposons en premier lieu

$$|\Gamma_i'| = |2\Gamma_1|.$$

On a alors

$$|\Gamma_1'' - \Gamma_1| = |\Gamma_i + \Gamma_i' - \Gamma_1| = |\Gamma_1 + \Gamma_i|;$$

d'où $i = 2$.

Supposons en second lieu

$$|\Gamma_i'| = |\Gamma_1 + \Gamma_k|,$$

k étant différent de l'unité. On a, pour le système bicanonique,

$$|\Gamma_1'' - \Gamma_1| = |\Gamma_i + \Gamma_k|$$

et l'on peut poser $i = 3$, $k = 4$. L'adjoint de $|\Gamma_4|$ doit contenir Γ_3; posons

$$|\Gamma_4'| = |\Gamma_3 + \Gamma_j|.$$

On aura

$$|\Gamma_4'' - \Gamma_4| = |\Gamma_1 + \Gamma_j|;$$

d'où $j = 2$. L'adjoint de $|\Gamma_2|$ doit par suite contenir Γ_4. Si l'on pose

$$|\Gamma_2'| = |\Gamma_4 + \Gamma_l|,$$

on aura

$$|\Gamma_4'' - \Gamma_4| = |\Gamma_l + \Gamma_3|;$$

d'où $l = 4$. Nous trouvons donc

$$|\Gamma'_1| = |2\Gamma_3|, \quad |\Gamma'_2| = |2\Gamma_4|, \quad |\Gamma'_3| = |\Gamma_1 + \Gamma_4|, \quad |\Gamma'_4| = |\Gamma_2 + \Gamma_3|.$$

7. Il nous reste à examiner l'hypothèse où le système $|\Gamma'_1|$ ne peut contenir les courbes $2\Gamma_2, 2\Gamma_3, \ldots, 2\Gamma_\nu$. Plus généralement, nous supposons distincts les systèmes

$$|2\Gamma_1|, \quad |2\Gamma_2|, \ldots, |2\Gamma_\nu|, \quad |\Gamma'_1|, \quad |\Gamma'_2|, \ldots, |\Gamma'_\nu|.$$

Comme ces systèmes sont distincts du système bicanonique $|\Gamma_1 + \Gamma_2|$, on doit avoir $2\nu + 1 \leq p$. Supposons que l'on ait

$$|\Gamma'_1| = |\Gamma_i + \Gamma_k|.$$

Alors $|\Gamma'_i|$, $|\Gamma'_k|$ doivent contenir Γ_1 comme partie. Posons

$$|\Gamma'_i| = |\Gamma_1 + \Gamma_j|, \quad |\Gamma'_k| = |\Gamma_1 + \Gamma_l|.$$

On a, pour le système bicanonique de Φ,

$$|\Gamma''_1 - \Gamma_1| = |\Gamma_j + \Gamma_k| = |\Gamma_i + \Gamma_l|.$$

On ne peut avoir $i = 2$, car alors on aurait $l = 1$ et $|\Gamma'_k| = |2\Gamma_1|$, ce qui est impossible par hypothèse. On peut supposer sans restriction $i = 3$ et l'on a alors $l = 4$.

On ne peut avoir $j = 2$, car alors $k = 1$ et $|\Gamma'_1| = |\Gamma_1 + \Gamma_3|$, ce qui est absurde. On ne peut non plus avoir $j = 3$, car alors $|\Gamma'_3| = |\Gamma_1 + \Gamma_3|$. Si l'on avait $j = 4$, on aurait $k = 3$ et $|\Gamma'_1| = |2\Gamma_3|$, ce qui est impossible. On posera donc $j = 5$; d'où $k = 6$. On a donc

$$|\Gamma'_1| = |\Gamma_3 + \Gamma_6|, \quad |\Gamma'_3| = |\Gamma_1 + \Gamma_5|, \quad |\Gamma'_6| = |\Gamma_1 + \Gamma_4|.$$

Le système tricanonique de Φ est

$$|\Gamma'_1 + \Gamma_2| = |\Gamma'_3 + \Gamma_4| = |\Gamma'_6 + \Gamma_5| = |\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_6| = |\Gamma_1 + \Gamma_4 + \Gamma_5|.$$

On a donc

$$|\Gamma_1 + \Gamma'_2| = |\Gamma_1 + \Gamma_4 + \Gamma_5|$$

et par suite

$$|\Gamma'_2| = |\Gamma_4 + \Gamma_5|.$$

On trouve de même

$$|\Gamma'_4| = |\Gamma_2 + \Gamma_6|, \quad |\Gamma'_5| = |\Gamma_2 + \Gamma_3|.$$

8. Nous allons maintenant nous occuper du cas $\nu = p - 1$, $p > 3$. D'après la formule (3), on a

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_{p-1} = 0,$$

c'est-à-dire que les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$ sont isolées.

Le nombre p étant premier et supérieur à 3, on a $p_a - 1 \geq 3$. Rapportons projectivement les courbes C aux plans d'un espace linéaire à $p - 2$ dimensions; à la surface F correspond dans cet espace une surface canonique (simple ou multiple), sur laquelle l'involution homologue de I_p est déterminée par une homographie cyclique, de période p. On peut supposer, sans restriction, que cette homographie a pour équations

$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{\varepsilon x_2} = \frac{x_3'}{\varepsilon^2 x_3} = \cdots = \frac{x_{p-2}'}{\varepsilon^{p-3} x_{p-2}} = \frac{x_{p-1}'}{\varepsilon^{p-2} x_{p-1}},$$

ε étant une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Nous supposerons que la courbe C_i est découpée sur F, par l'hyperplan $x_i = 0$.

Le système bicanonique $|2C|$ de F contient p systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_p. Ce sont les systèmes

$$|2C_1|, \quad |2C_2|, \ldots, |2C_{p-1}|, \quad |C_1 + C_{p-1}|.$$

D'après ce qui précède, le dernier de ces systèmes est l'homologue du système bicanonique de Φ. Le système partiel $|2C_1|$ comprend les courbes

$$2C_1, \quad C_3 + C_{2n}, \quad C_4 + C_{2n-1}, \ldots, C_{n+1} + C_{n+2},$$

où l'on a posé $p = 2n + 1$. Il lui correspond donc, sur Φ, l'adjoint $|\Gamma_2'|$ à $|\Gamma_2|$.

D'une manière générale, on aura, sur Φ,

$$|\Gamma'_{2\mu+1}| = |\Gamma_1 + \Gamma_{2\mu}| = |\Gamma_2 + \Gamma_{2\mu-1}| = \cdots = |2\Gamma_{n+\mu+1}|.$$
$$|\Gamma'_{2\mu+2}| = |\Gamma_1 + \Gamma_{2\mu+1}| = |\Gamma_2 + \Gamma_{2\mu}| = \cdots = |2\Gamma_{\mu+1}|.$$

Le système bicanonique de Φ sera

$$|\Gamma_1 + \Gamma_{2n}| = |\Gamma_2 + \Gamma_{2n-1}| = \cdots = |\Gamma_n + \Gamma_{n+1}|.$$

On vérifie aisément que c'est le second cas étudié au n° 6 qui se présente ici, sauf un changement de notation.

Le système tricanonique de Φ comprend les courbes

$$\Gamma_{2i} + 2\Gamma_{2n-i+1}, \qquad \Gamma_{2i+1} + 2\Gamma_{n-i}.$$

Les p systèmes $|\Gamma'_1|, \ldots, |\Gamma'_{p-1}|, |\Gamma_1 + \Gamma_{2n}|$ ont actuellement la même dimension $\pi^{(1)} - 1$. Le système tricanonique a la dimension $3(\pi^{(1)} - 1)$.

L'examen d'une surface tricanonique équivalente à Φ permettra d'étudier plus profondément cette surface. Notons que, d'après une formule de M. Rosenblatt [1], on a $\pi^{(1)} \leq 27$.

Liége, le 19 juillet 1932.

---

(1) A. ROSENBLATT, Sur quelques inégalités dans la théorie des surfaces algébriques. (*C. R.*, 1912.)