Structure d'un point uni d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique (première note)

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination de la structure d'un point uni d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique et de celle du point de diramation correspondant sur une surface image de l'involution.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Structure d'un point uni d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique

(première note)

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination de la structure d'un point uni d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique et de celle du point de diramation correspondant sur une surface image de l'involution.

Dans notre ouvrage sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis (1), nous avons indiqué une méthode pour déterminer la structure d'un point uni et celle du point de diramation correspondant sur une surface image de l'involution. Nous considérons sur la surface F support de l'involution, un système linéaire $|C|$ dépourvu de points-base et appartenant à l'involution, puis les systèmes linéaires formés par les courbes C passant par le point uni A. Si $p = 2\nu + 1$ est le nombre premier ordre de l'involution, il y a $\nu + 1$ de ces systèmes $|C^1|$, $|C^2|, \ldots, |C^\nu|, |C^{\nu+1}|$ satisfaisant à ces conditions et dont les courbes ont des multiplicités croissantes en A. Les courbes des ν premiers de ces systèmes ont comme tangentes en A les deux droites du plan tangent à F en A qui sont unies pour la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution, tandis que les courbes

(1) *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Édit. Cremonese, 1963). Dans le courant de ce travail, cet ouvrage sera dénoté par T.I.C.

du dernier système $| C^{\nu+1} |$ ont en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables.

Les points unis de l'involution situés dans les domaines des différents ordres de A forment une sorte d'arbre dont chaque élément est l'origine de deux branches sauf si cet élément est un point uni de première espèce (dans le domaine duquel l'involution donne l'identité). Aux domaines de ces points unis de première espèce correspondent sur une surface image de l'involution des courbes rationnelles isolées dont l'ensemble constitue la structure du point de diramation A′ homologue du point A.

Dans cette note, nous étudions un point uni d'une involution particulière qui a ceci d'intéressant que dans l'ensemble des courbes rationnelles qui donnent la structure du point de diramation, certaines se présentent plusieurs fois. Cette particularité nous a conduit à cette publication. Nous avons été obligé de considérer deux cas suivant que le nombre premier p est de la forme $6t + 1$ ou $6t + 5$. Le premier cas fait l'objet de cette première note, le second fera l'objet d'une seconde note. Notons que nous avons été obligé de traiter à part les cas $t = 1, 2, 3$, qui font l'objet des dernières pages de la note.

1. Soit dans un espace S_r à r dimensions F une surface algébrique transformée en soi par une homographie cyclique H dont la période est un nombre premier $p = 2\nu + 1$ et qui possède p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ dont le premier seul rencontre la surface en un nombre fini de points. Sur F, l'homographie H engendre une involution I d'ordre p ne possédant qu'un nombre fini de points unis: les points de rencontre de σ_0 avec F.

Nous désignerons par $| C |$ le système des sections hyperplanes de F. Il contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution, découpés par les hyperplans unis de H. L'un d'eux ,$| C_0 |$, découpé par les hyperplans passant par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$, est dépourvu de points-base. Nous désignerons par r_0 sa dimension.

En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace Σ à r_0 dimensions, il correspond à F une surface Φ image de l'involution I. Nous désignerons par Γ les sections hyperplanes de Φ, par π leur genre et par n l'ordre de la surface Φ.

Le plan tangent ϖ à la surface F en un point uni A de l'involution est transformé en lui-même par H. Si nous désignons par x_0, x_1, x_2

les coordonnées des points de ce plan, le point A étant déterminé par $x_1 = x_2 = 0$, l'homographie déterminée par H dans ce plan peut être représentée, si A est un point uni de seconde espèce, par les équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^\alpha x_2$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité, ou par

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = x_0 : \eta^\beta x_1 : \eta x_2$$

en posant $\eta = \varepsilon^\alpha$. On sait que $\alpha\beta - 1$ est un multiple de p.

Au point A correspond sur la surface Φ un point de diramation A' qui est multiple pour la surface Φ.

Nous allons déterminer la structure des points A et A' dans l'hypothèse où l'on a

$$\boxed{\alpha = \nu, \beta = p - 2.}$$

2. Les courbes C_0 passant par A y acquièrent un point triple à tangentes fixes, nous les désignerons par C_0^1.

Les courbes C_0^1 assujetties à toucher en A une droite distincte de $x_1 = 0, x_2 = 0$ acquièrent en ce point la multiplicité six. Et ainsi de suite. On a dans le système $| C_0 |$, une suite de systèmes linéaires (T.I.C., p. 45)

$$| C_0^1 |, | C_0^2 |, | C_0^3 |, \ldots, | C_0^\nu |, | C_0^{\nu+1} |$$

dont les courbes ont en A des multiplicités croissantes, les tangentes étant fixes et coïncidant avec $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ sauf pour le dernier système dont les courbes ont en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables.

Nous désignerons respectivement par $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_\nu, \Gamma_{\nu+1}$ les courbes, sections hyperplanes de la surface Φ, qui correspondent aux courbes $C_0^1, C_0^2, C_0^3, \ldots, C_0^\nu, C_0^{\nu+1}$.

La surface F est d'ordre $pn = m$. Les projections sur le plan $\bar{\omega}$ des courbes C_0 ont une équation de la forme

$$\begin{aligned} \lambda_0 x_0^m + \sum_{i=1} \lambda_i x_0^{m-3i} x_1^i x_2^{2i} + x_0^{m-k}(\lambda_p x_1^p + \lambda_{p+1} x_2^p) \\ + \sum_{k=1} \mu_k x_0^{m-\nu-3k-1} x_1^{\nu+k} x_2^{2k-1} + \varphi = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

où φ est un polynôme de degré m en x_0, x_1, x_2 dont chaque terme est transformé en lui-même par H et qui ne contient x_0 qu'à une puissance inférieure à $m - p$.

Il convient dans cette équation d'ordonner les termes suivant les puissances décroissantes de x_0. Il convient donc de trouver pour quelle valeur de i on a

$$3i < v + 2 < 3i + 3.$$

Cela exige que l'on connaisse le reste de la division de p par 3. On ne peut avoir $v = 3t + 1$ car alors p ne serait pas premier. On peut donc poser $v = 3t$ ou $v = 3t + 2$. On a alors

$$p = 6t + 1, t = 1, 2, 3, 5, 6, \ldots$$

$$p = 6t + 5, t = 0, 1, 2, 3, 4, 6 ,\ldots$$

Nous commencerons par supposer $p = 6t + 1$. Dans ces conditions, dans l'équation (1), i peut prendre les valeurs de 1 à $2t$ et k peut prendre les valeurs de 1 à t. Dans l'équation (1), le terme $x_0^{m-3t}x_1x_2^{2t}$ précède le terme en $x_0^{m-3t-2}x_1^{3t+1}x_2$, les termes suivants sont obtenus en faisant successivement $i = t + 1$, $k = 2$, $i = t + 2$, $k = 3$, ..., $i = 2t - 1$, $k = t$, $i = 2t$.

Notons que le point A est ce que nous avons appelé un point uni de seconde espèce et de première catégorie (T.I.C.. p. 57).

Nous désignerons dans la suite par a la tangente $x_1 = 0$ et par b la tangente $x_2 = 0$, de sorte que les courbes C_0 ont comme tangentes en A deux fois la droite a et une fois la droite b.

3. Considérons les courbes C_0^1 qui ont un point triple en A. Nous reprendrons les notations de notre ouvrage pour désigner les points infiniment voisins successifs du point A (T.I.C., p. 51). Le point A est l'origine de deux branches linéaires, l'une formée de $3t - 1$ points

$$(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 3t - 1)$$

infiniment voisins successifs de A, doubles pour les courbes C_0^1 et l'autre de $p - 3$ points

$$(\beta, 1), (\beta, 2), \ldots, (\beta, p - 3)$$

infiniment voisins successifs de A, simples pour les courbes C_0^1. Ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution I sauf les derniers

$(\alpha, 3t - 1)$ et$(\beta, p - 3)$ qui sont unis de première espèce. Le point $(\alpha, 1)$ se trouve sur la droite a et le point $(\beta, 1)$ sur la droite b.

Le point de diramation A′ est triple pour la surface Φ, le cône tangent se décomposant en un cône du second ordre et en un plan passant par une génératrice du cône.

Projetons la surface Φ du point A′ sur un hyperplan Σ_1 de l'espace Σ et soit Φ_1 la surface obtenue. Sur la surface Φ_1 il correspond aux points infiniment voisins de A′ une conique γ_{11} et une droite γ_{21} se rencontrant en un point A'_1. Le degré virtuel de la conique γ_{11} est égal à -3 et celui de la droite γ_{21} à -2.

On notera que le plan tangent en A′ à Φ n'est pas tangent aux cônes du second ordre qu'il rencontre suivant une génératrice.

Observons que les courbes C_0^{t+1} obtenues en faisant $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_t = 0$ dans l'équation (1) passent par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \dots, (\alpha, 3t - 1)$ et que par conséquent, ces points appartiennent à toutes les courbes C_0 pour $i \leqslant t$ (T.I.C., p. 53).

4. Considérons les courbes C_0^i pour $1 < i \leqslant t$. Elles ont en A la multiplicité $3i$ et passent une fois par le point $(\alpha, 3t - 1)$.

Supposons que les courbes C_0^i passent $2i$ fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2), \dots, (\alpha, x)$, $y + 1$ fois par le point $(\alpha, x + 1)$ et une fois par les points $(\alpha, x + 2), \dots, (\alpha, 3t - 1)$. La somme des multiplicités des points A, $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \dots, (\alpha, 3t - 1)$ doit être égale à p (T.I.C., p. 11), on doit donc avoir

$$3i + 2ix + y + 3t - 1 - x = 6t + 1,$$

c'est-à-dire

$$(2i - 1)x + y = 3t - 3i + 2.$$

On ne peut avoir $y = 0$, car alors p serait multiple de $2i - 1$.

Le point $(\alpha, x + 1)$ est uni de seconde espèce et deux points unis lui sont infiniment voisins. L'un est le point $(\alpha, x + 2)$, l'autre est un point $(\alpha, x + 1, 1)$. Ce point est au plus multiple d'ordre y et en tout cas, il est suivi d'un certain nombre de points unis infiniment voisins successifs $(\alpha, x + 1, 2), \dots, (\alpha, x + 1, x_1)$ dont la somme des multiplicités pour les courbes C_2^i, qui ne peut aller en croissant, est $2i + y$. Si le point $(\alpha, x + 1, x_1)$ n'est pas uni de première espèce, on considère le point $(\alpha, x + 1, x_1, 1)$ et ainsi de suite, jusqu'au moment où l'on parviendra à un point uni de première espèce, comme il a été indiqué dans le chapitre II, § 2 de T.I.C.

De même, supposons que les courbes C_0^i passent i fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 2), \ldots, (\beta, x')$, et y' fois par le point $(\beta, x' + 1)$. En raisonnant comme plus haut, on voit que l'on doit avoir

$$ix' + y' = 6t - 3i + 1.$$

On ne peut avoir $y' = 0$ car alors p ne serait pas un nombre premier.

Au point uni $(\beta, x' + 1)$ font suite un ou plusieurs points unis $(\beta, x' + 1, 1), \ldots$, appartenant aux courbes C_0^i. Ces courbes ne passent pas par le point $(\beta, x' + 2)$ et en raisonnant comme dans la T.I.C., on arrive finalement à un point uni de première espèce.

Le degré effectif de $| C_0^i |$ doit être multiple de p et précisément égal à celui du système $| \Gamma_i |$ multiplié par p.

5. Appliquons ce qui précède au système $| C_0^t |$.

Nous devons avoir

$$(2t - 1)x + y = 2,$$

d'où $x = 0$ et $y = 2$. Le point $(\alpha, 1)$ est donc triple pour les courbes C_0^t et ces courbes passent une fois par les points $(\alpha, 2), (\alpha, 3), \ldots, (\alpha, 3t - 1)$. Elles passent en outre par un certain nombre de points $(\alpha, 1, 1), (\alpha, 1, 2)$ infiniment voisins successifs du point $(\alpha, 1)$. La somme des multiplicités de ces points pour les courbes C_0^1 doit être égale à $2t - 3$. Le point $(\alpha, 1)$ étant triple et le point $(\alpha, 2)$ étant simple, le point $(\alpha, 1, 1)$ doit être double pour les courbes. Nous sommes conduit à supposer que les points $(\alpha, 1, 1), (\alpha, 1, 2), \ldots, (\alpha, 1, t - 2)$ sont doubles, le point $(\alpha, 1, t - 1)$ simple et en outre le point $(\alpha, 1, t - 1, 1)$ simple également pour les courbes C_0^1, le dernier de ces points étant uni de première espèce pour l'involution.

On trouve de même que les courbes C_0^t passent t fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 2), (\beta, 3)$, une fois par le point $(\beta, 4)$ et par les points $(\beta, 4, 1), (\beta, 4, 2), \ldots, (\beta, 4, t - 1)$, ce dernier point étant uni de première espèce pour l'involution.

Le degré effectif du système $| C_0^1 |$ est $pn - (12t^2 + 8t + 1)$ et par suite celui de $| \Gamma_t |$ est égal à $n - (2t + 1)$.

Observons que les degrés des systèmes $| \Gamma_1 |, | \Gamma_2 |, \ldots, | \Gamma_i |$ vont en décroissant de $n - 3$ à $n - (2t + 1)$, donc les degrés de ces systèmes sont respectivement $n - 3, n - 5, \ldots, n - (2t + 1)$. Il en résulte que si l'on désigne par Φ_i la surface dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_i et par A'_i le point qui correspond à A', il existe sur cette surface deux droites passant par A'_i, ce point étant double biplanaire pour la surface $(1 < i \leqslant t)$. Par suite, sur les courbes C_0^i, le point A est l'origine de deux branches superlinéaires se terminant à des points unis de première espèce pour l'involution, simples pour les courbes. Nous désignerons par Σ_i l'espace à $r_0 - i$ dimensions contenant la surface Φ_i. Celle-ci est la projection à partir du point A'_{i-1} de la surface Φ_{i-1}.

Le point A' est équivalent à un ensemble de $2t$ courbes rationnelles, tracées sur la surface Φ_t,

$$\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1t}, \gamma_{2t}, \ldots, \gamma_{22}, \gamma_{21},$$

ces courbes étant de degré virtuel -2 sauf la première, qui est de degré virtuel -3.

La projection de la conique γ_{11} de la surface Φ_1 sur la surface Φ_2 est une droite que nous désignerons par γ'_{11}. Elle se retrouve sur toutes les surfaces $\Phi_3, \ldots, \Phi_t$ et ne passe pas par les points A'_i. En effet, le point $(\alpha, 3t - 1)$ appartient à toutes les courbes C_0^i $(i \leqslant t)$.

6. Nous allons maintenant considérer le système C_0^{t+1} dont les courbes ont en A la multiplicité $3t + 2$ et une tangente confondue avec a et $3t + 1$ confondues avec b. Il en résulte que les courbes C_0^{t+1} passent une fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 3t - 1)$.

Le point A'_t est au plus double pour la surface Φ_t de sorte que la surface Φ_{t+1}, projection de Φ_t à partir de ce point sur un hyperplan Σ_{t+1} de l'espace Σ_t est une surface d'ordre $n - (2t + 2)$ ou $n - (2t + 3)$. Il en résulte que le point A absorbe $12t^2 + 8t + 1$ ou $12t^2 + 8t + 3$ points d'intersection des courbes C_0^{t+1}. Or le point A isolé et les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 3t - 1)$ absorbent $9t^2 + 15t + 3$ de ces intersections. Il en résulte que les points des branches superlinéaires d'origine A appartenant aux courbes C_0^{t+1} et contenant $(\beta, 1)$ absorbent $3t^2 - 7t - 3$ ou $3t^2 + 5t$ points d'intersection de ces courbes. D'autre part, la somme des multiplicités des points de la branche linéaire contenant $(\beta, 1)$ doit être égale à $3t - 1$. Par conséquent, aucun de ces points ne peut avoir qu'une multiplicité inférieure à $2t$. On en conclut que le point $(\beta, 1, 1)$ appartient certainement aux courbes C_0^{t+1} et que le point A est l'origine de deux branches superlinéaires contenant le point $(\beta, 1)$ et appartenant à ces courbes. Le point A'_t est donc double biplanaire pour la surface Φ_t et la surface Φ_{t+1} est donc d'ordre $n - (2t + 3)$.

Pour déterminer la structure du point A, observons que dans l'intersection d'une courbe C_0^{t+1} et d'une courbe C_0^i quelconque, le point A absorbe un nombre de points d'intersection multiple de p.

Les courbes C_0^{2t} passent $6t$ fois par le point A et une fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, 4t - 1), (\beta, 1), (\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 2t-1)$ Le nombre des intersections des courbes C_0^{t+1} et C_0^{2t} absorbées en A est égal à $18t^2 + 12t + 1 + x$, x étant le nombre des points d'intersection absorbés en $(\beta, 1), (\beta, 1, 1), \ldots$, Ce nombre doit être multiple de p, ce qui exige que l'on ait $x = 3t + 1$. Il en résulte que les courbes C_0^{t+1} passent $t + 2$ fois par le point $(\beta, 1)$ et une fois par les points $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 2t - 1)$.

Par suite, les courbes C_0^{t+1} passent $t + 1$ fois par le point $(\beta, 2)$ et $t - 4$ fois par le point $(\beta, 3)$. Nous devons donc supposer $t > 3$ ($t = 4$ donne $p = 25$ qui ne peut convenir). Le cas $t = 3$, $p = 19$ sera examiné à part, en même temps que les cas $t = 1$ et $t = 2$.

Si $t = 5, p = 31$, les courbes C_0^6 passent simplement par les points $(\beta, 3, 1), (\beta, 3, 2), \ldots, (\beta, 3, 5)$.

Si $t = 6$, $p = 37$, les courbes C_0^7 passent deux fois par les points $(\beta, 3, 1), (\beta, 3, 2)$ et une fois par les points $(\beta, 3, 3)$ et $(\beta, 3, 3, 1)$.

Si $t = 7, p = 43$, les courbes C_0^8 passent trois fois par le point $(\beta, 3, 1)$ et une fois par les points $(\beta, 3, 2), (\beta, 3, 2, 1), (\beta, 3, 2, 1, 1)$.

On ne peut avoir $t = 8$ car alors $p = 49$. Si $t > 8$, les courbes C_0^{t+1} passent cinq fois par le point $(\beta, 3, 1)$ et passent également par le point $(\beta, 3, 1, 1)$ et ainsi de suite. En suivant le procédé indiqué dans dans notre ouvrage (T.I.C., p. 50 et suiv.), on arrivera finalement à un point simple uni pour l'involution. Dans tous les cas où t est supérieur à 3, nous représenterons ce point par $(\beta, 3, 1, \ldots)$.

Sur la surface Φ_{t+1}, nous avons donc trois droites: la droite γ_{11}, la droite $\gamma_{2\,t+1}$ représentant le domaine du point $(\beta, 1, 2t - 1)$ et la droite $\gamma_{2\,t+2}$ qui représente le domaine du point $(\beta, 3, 1, \ldots)$. Les deux dernières droites se rencontrent en un point A_{t+1} et la surface Φ_{t+1} est d'ordre $n - (2t + 3)$ comme nous l'avons vu.

7. Passons l'examen du système $| C_0^{t+2} |$, dont les courbes passent $3t + 3$ fois par le point A et ont $2t + 2$ tangentes confondues avec a et $t + 1$ avec b.

Ces courbes passent $t + 1$ fois par les points $(\beta, 1)$ et $(\beta, 2)$, $t - 4$ fois par le point $(\beta, 3)$. Il en résulte qu'elles passent par le point $(\beta, 3, 1, \ldots)$. Observons que dans le calcul des points d'intersection de deux courbes C_0^{t+1} absorbés en A, les points $(\beta, 3, 1), \ldots, (\beta, 3, 1, \ldots)$ comptent pour $5t - 20$ unités. Ils interviennent pour le même nombre dans l'intersection de deux courbes C_0^{t+2}.

Cherchons maintenant le nombre de points d'intersection absorbés en A par les courbes C_0^{t+2} et C_0^{2t}. En désignant par x le nombre de points absorbés par $(\alpha, 1), (\alpha, 1, 2), \ldots$, on trouve $18t^2 + 19t + 1 + x$, nombre qui doit être multiple de p. Pour cela, il faut que l'on ait $x = 2t + 2$. Dans ces conditions, les courbes C_0^{t+2} passent cinq fois par le point $(\alpha, 1)$, deux fois par les points $(\alpha, 1, 1), (\alpha, 1, 2,), \ldots, (\alpha, 1, t - 2)$, une fois par les points $(\alpha, 1, t - 1), (\alpha, 1, t - 1, 1)$.

On trouve aisément que les points $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, t - 2)$ sont triples, le point $(\alpha, t - 1)$ double et les points $(\alpha, t - 1, 1)$ et $(\alpha, t - 1, 1, 1)$ simples pour les courbes C_0^{t+2}.

De tout ceci, on conclut que sur la surface Φ_{t+1}, la droite γ_{11} rencontre la droite $\gamma_{2\,t+2}$ mais non la droite $\gamma_{2\,t+1}$.

Le point A absorbe $12t^2 + 32t + 5$ des points d'intersection de deux courbes C_0^{t+2}, par conséquent le système $|\,\Gamma_{t+2}\,|$ a le degré $n - (2t + 5)$ et le point A''_{t+1} commun aux droites γ_{12} et $\gamma_{2\,t+2}$ est double biplanaire pour la surface Φ_{t+1}. En projetant celle-ci de ce point sur un hyperplan Σ_{t+2} de l'espace Σ_{t+1}, on obtient une surface Φ_{t+2} d'ordre $n - (2t + 5)$.

Sur la surface Φ_{t+2} sont tracées une droite γ_{12} représentant le domaine du point $(\alpha, t - 1, 1, 1)$, la droite γ_{1t} représentant le point $(\alpha, 1, t - 1, 1)$ rencontrant la première au point A'_{t+2} et enfin la droite $\gamma_{2\,t+1}$.

Nous désignerons par $|\,C_0^{t+2i-1}\,|$, $|\,C_0^{t+2i}\,|$ les systèmes linéaires appartenant au système $|\,C_0\,|$ et postérieurs à $|\,C_0^{t+2}\,|$ $(i = 2, 3, \ldots, t)$. Les courbes du premier système passent $3t + 3i - 1$ fois par le point A et celles du second $3t + 3i$ fois. Le second système suit donc le premier, les systèmes étant rangés suivant les multiplicités croissantes du point A.

8. Considérons le système $|\,C_0^{t+2i-1}\,|$ dont les courbes passent $3t + 2i - 1$ fois par A et ont $2i - 1$ tangentes confondues avec a et $3t + i$ avec b $(2i - 1 < t)$.

Supposons que les courbes C_0^{t+2i-1} passent $2i-1$ fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, x)$ et y fois par le point $(\alpha, x+1)$. On doit avoir

$$(2i-1)x + y = 3t - 3i + 2.$$

C'est précisément l'équation rencontrée au n° 4 et on voit que les courbes contiennent une branche superlinéaire d'origine A, passant par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, x), (\alpha, x+1), (\alpha, x+1, 1), \ldots$ et se terminant en un point simple au domaine duquel correspond la droite γ_{1i}.

Supposons que le nombre de points d'intersection des courbes C_0^{t+2i-1}, C_0^{2t} absorbés par les points $(\beta, 1), (\beta, 1, 1) \ldots$ soit x'. Le nombre des points d'intersection de ces courbes absorbés en A est $18t^2 + 6t(3i-1) + 2i - 1 + x'$ et doit être multiple de p, on doit avoir $x' = 3t + i$. Le point $(\beta, 1)$ ne peut avoir la multiplicité $3t + i$, car la somme des multiplicités des courbes C_0^{t+2i-1} aux points A et $(\beta, 1)$ serait supérieure à p. Il en résulte que ces courbes passent par le point $(\beta, 1, 1)$. La multiplicité du point $(\beta, 1)$ pour les courbes en question est au plus égale à $3t - 3i + 2$ et le résultat précédent montre que les courbes C_0^{t+2i-1} passent une fois par les points $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2), \ldots, (\beta, 1, 2t-1)$ et $t + i + 1$ fois par le point $(\beta, 1)$, à condition que l'on ait $t + i + 1 \leqslant 3t - 3i + 1$, c'est-à-dire $2i \leqslant t$.

Plaçons-nous dans cette hypothèse. Les courbes C_0^{t+2i-1} passant $t + i + 1$ fois par $(\beta, 1)$ et une fois par $(\beta, 1, 1)$, doivent passer $t + i$ fois par le point $(\beta, 2)$ et $t - 5i + 1$ fois par le point $(\beta, 3)$.

Supposons que l'on ait $5i < t + 1$. Alors les courbes C_0^{t+2i-1} passent $6i - 1$ fois par le point $(\beta, 3, 1)$ et le point A est l'origine d'une branche superlinéaire appartenant aux courbes C_0^{t+2i-1} se terminant par un point simple, uni de première espèce pour l'involution, que nous désignerons par $(\beta, 3, 1, \ldots)$.

Supposons au contraire $5i \geqslant t + 1$. Alors les courbes C^{t+2i-1} ne peuvent passer par le point $(\beta, 3)$ mais passent $2t - 4i + 1$ fois par $(\beta, 2)$ et $5i - t$ fois par le point $(\beta, 2, 1)$. Le point A est l'origine d'une branche superlinéaire appartenant aux courbes C_0^{t+2i-1} se terminant par un point simple que nous désignerons par $(\beta, 2, 1, \ldots)$.

Considérons maintenant le cas où l'on a $2i > t$. Les courbes C_0^{t+2i-1} ne peuvent passer par le point $(\beta, 2)$ et passent donc $3t - 3i + 2$ fois par $(\beta, 1)$. La somme des multiplicités des points $(\beta, 1, 1), (\beta, 1, 2) \ldots$ pour les courbes en question est égale à $3t + i - (3t - 3i + 2) = 4i - 2$.

Observons que si $i = t$, les points $(\beta, 1)$ et $(\beta, 1, 1)$ sont doubles pour les courbes. Si nous supposons $i < t$, les nombres $3t - 3i + 2$, $4i - 2$ sont premiers entre eux et A est l'origine d'une branche superlinéaire appartenant aux courbes C_0^{t+2i-1} et se terminant par un point simple que nous désignerons par $(\beta, 1, 1, \ldots)$.

Pour $i = t$, les courbes C_0^{3t-1} passent deux fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 2t - 1)$.

Sur la surface Φ_{t+2i-1} dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_{t+2i-1}- il existe deux droites γ_{1t} et $\gamma_{2\,t+2i-1}$ représentant l'un des points $(\beta, 3, 1, \ldots)$, ou $(\beta, 2, 1, \ldots)$ ou $(\beta, 1, 1\text{-} \ldots)$ suivant la valeur de i. En outre, si $2i < t$, la surface contient la droite $\gamma_{2\,t+1}$. Observons que si $i = t$, la surface contient également la droite $\gamma_{2\,t+2}$.

9. Étudions maintenant le système $| C_0^{t+2i} |$ dont les courbes passent $3t + 3i$ fois par le point A et ont $2t + 2i$ tangentes confondues avec a et $t + i$ avec b.

Supposons que les courbes C^{t+2i} passent $t + i$ fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 2), \ldots, (\beta, x)$ et y fois par le point $(\beta, x + 1)$. On doit avoir

$$(t + i)x + y = 3t - 3i + 1.$$

On a certainement $x \geqslant 0$ et les courbes passent par le point $(\beta, x + 1, 1)$, Le point A est l'origine d'une branche superlinéaire appartenant aux courbes considérées et se terminant en un point simple que nous dénoterons par $(\beta, x + 1, 1, \ldots)$.

Désignons par x' la somme des nombres de points d'intersection des courbes C_0^{2t}, C_0^{t+2i} absorbés par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 1, 1) \ldots$ Le nombre de points d'intersection des courbes précédentes absorbés en A est égal à $18t^2 + (18i + 1)t + i + x'$ et ce nombre doit être multiple de p. On doit donc avoir $x' = 2t + 2i$.

Le point $(\alpha, 1)$ peut être multiple de $2t + 2i$ et les courbes C_0^{t+2i} ne passent pas par $(\alpha, 1, 1)$, mais elles passent $t - 5i + 1$ par le point $(\alpha, 2)$. En supposant que ce nombre soit positif, les courbes devraient passer $2t + 2i - (t - 5i = 1) = t + 7i - 1$ fois par le point $(\alpha, 2, 1)$, ce qui est absurde, cette multiplicité étant supérieur à celle de $(\alpha, 2)$.

Les courbes C_0^{t+2i} passent donc par le point $(\alpha, 1, 1)$ et précisément, elles passent deux fois par les points $(\alpha, 1, 1), (\alpha, 1, 2), \ldots, (\alpha, 1, t - 2)$, une fois par les points $(\alpha, 1, t - 1), (\alpha, 1, t - 1, 1)$ et enfin $2i + 3$ fois par le point $(\alpha, 1)$.

Supposons que les courbes C^{t+2i} passent $2i + 1$ fois par les points $(\alpha, 2), (\alpha, 3), \ldots, (\alpha, X)$ et y fois par le points $(\alpha, x + 1)$. On doit avoir

$$2i + 3 + (2i + 1)x + y = 3t - 3i + 1,$$

c'est-à-dire

$$(2i + 1)x + y = 3t - 3i + 1.$$

En remplaçant dans cette équation i par $i - 1$, on retrouve l'équation du n° 4. Le point A est donc l'origine d'une branche superlinéaire appartenant aux courbes C^{t+2i} et se terminant par un point simple dont le domaine est représenté par la droite $\gamma_{1\ t+1}$.

Sur la surface Φ_{t+2i} dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_{t+2i} sont tracées trois droites: la droite $\gamma_{1\ t+1}$ qui représente le domaine du point $(\alpha, x + 1, 1, \ldots)$ et la droite $\gamma_{2\ t+2i}$ qui représente le domaine du point $(\beta, x + 1, 1, \ldots)$.

10. Considérons les systèmes $| C_0^{3t} | \, | C_0^{3t-1} |, | C_0^{3t-2} |$.

Nous avons déjà vu que les courbes C_0^{3t} passent $6t$ fois par le point A, une fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 1, 1), (\alpha, 1, 2), \ldots, (\alpha, 1, 4t - 1)$, et par les points $(\beta, 1), (\beta, 1), (\beta, 1, 1), (\beta, 1, 2), \ldots, (\beta, 1, 2t - 1)$. Le point A absorbe $6t(6t + 1)$ points d'intersection de ces courbes de sorte que la surface Φ_{3t} dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_{3t} est d'ordre $n - 6t$. Elle contient deux droites $\gamma_{1\ t+2}$ représentant le domaine du point $(\alpha, 1, 4t - 1)$ et $\gamma_{2\ t+1}$ représentant le domaine du point $(\beta, 1, 2t - 1)$. Ces deux droites se rencontrent en un point et si l'on projette la surface de ce point sur un hyperplan de l'espace ambiant, on obtient une surface Φ_{3t+1} d'ordre $n - (6t + 1)$. Le point commun aux deux droites est donc simple pour la surface Φ_{3t}.

Les courbes C^{3t-1} passent $6t - 1$ fois par le point A, deux fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, t - 2)$, une fois par les points $(\alpha, 1, t - 1), (\alpha, 1, t - 1, 1)$, deux fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 2t - 1)$. Dans l'intersection de deux courbes C_0^{3t-1}, le point A absorbe $36t^2 - 1$ points et la surface Φ_{3t-1} dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_{3t-1} a l'ordre $n - (6t - 1)$. Elle contient deux droites: la droite γ_{1t} et une droite $\gamma_{2\ t+1}$ comptée deux fois. Ces deux droites se rencontrent en un point A_{3t-1} simple pour la surface puisque la projection de la surface à partir de ce point sur un hyperplan est la surface Φ_{3t} d'ordre $n - 6t$. On en déduit que la droite $\gamma_{1\ t+2}$ est de degré virtuel -1.

Passons à l'étude du système $| C_0^{3t-2} |$ dont les courbes passent $6t - 3$ fois par A, quatre fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, t - 2)$, deux fois par les points $(\alpha, 1, t - 1), (\alpha, 1, t - 1, 1)$ et quatre fois par le point $(\beta, 1)$. En considérant les intersections des courbes C_0^{3t}, C_0^{3t-2}, on voit que les points $(\beta, 1), (\beta, 1, 1), \ldots$ comptent pour $2t - 1$ dans l'intersection. Pour déterminer le comportement des courbes en ces points, on est conduit à considérer la parité de t.

Si $t = 2t'$, les courbes C_0^{3t-2} passent quatre fois par les points $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, t' - 2)$, trois fois par le point $(\beta, 1, t', -1)$, une fois par les points $(\beta, 1, t' - 1, 1), (\beta, 1, t' - 1, 2), (\beta, 1, t' - 1, 3)$. Si $t = 2t' + 1$, ces courbes passaient quatre fois par les points $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, t' - 1)$ et une fois par les quatre points $(\beta, 1, t'), (\beta, 1, t', 1), \ldots, (\beta, 1, t', 3)$. Dans tous les cas, ces points et $(\beta, 1)$ absorbent $8t - 4$ points dans l'intersection des courbes C_0^{3t-2}.

Cela étant, dans l'intersection des courbes C_0^{3t-2}, le point A absorbe $(6t + 1)(6t - 3)$ unités et la surface Φ_{3t-2} est d'ordre $n - (6t - 3)$. Cette surface contient deux droites: la droite $\gamma_{1\ t+1}$ comptée deux fois et la droite $\gamma_{2\ 3t-3}$. Ces deux droites se rencontrent en un point double pour la surface.

Les surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ sont d'ordres $n - 3, n - 5, \ldots$ Entre les surfaces Φ_1 et Φ_{3t-1} se trouvent $3t - 2$ surfaces. La surface Φ_{3t-1} étant d'ordre $n - (6t - 1)$, les surfaces $\Phi_2, \Phi_2, \ldots$ ont des ordres qui vont en décroissant de deux unités, c'est-à-dire que la surface Φ_k a l'ordre $n - 2k - 3$.

Le point A' de la surface Φ est équivalent à $3t + 2$ courbes rationnelles dont une est de degré virtuel -3 et les autres de degré virtuel -2.

12. Il nous reste à examiner les cas $t = 1, 2, 3$, c'est-à-dire les involutions d'ordres 7, 13, 19.

Considérons le cas $p = 7$.

Les courbes C_0 passent trois fois par A, deux fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2)$ et une fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 2), (\beta, 3), (\beta, 4)$. La surface Φ_1 est d'ordre $n - 3$ et contient une conique γ_{11} et une droite γ_{21} ayant un point commun.

Les courbes C_0^1 passent cinq fois par A, une fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2)$, deux fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 1, 1), (\beta, 1, 2)$. La surface Φ_2 est d'ordre $n - 5$ et contient deux droites: γ_{11} projection de la conique γ_{11} et γ_{22} représentant le domaine du point $(\beta, 1, 2)$.

Les courbes C_0^2 passent six fois par A, une fois par les points (α, 1), (α, 1, 1), ..., (α, 1, 3) et une fois par les points (β, 1), (β, 1, 1). La surface Φ_3 est d'ordre $n-6$ et contient deux droites: la droite $'_{12}$ représentant le domaine de (α, 1, 3) et la droite $'_{22}$.

13. Passons au cas de l'involution d'ordre 13.

Les courbes C_0^3 passent trois fois par A, deux fois par les cinq points (α, 1), ..., (α, 5) et une fois par les dix points (β, 1), ..., (β, 10). La surface Φ_1, d'ordre $n-3$, contient une conique γ_{11} et une droite γ_{21} se rencontrant en un point.

Les courbes C_0^2 passent six fois par A, trois fois par (α, 1), une fois par (α, 2), ..., (α, 5) et par (α, 1, 1), (α, 1, 1, 1), deux fois par les points (β, 1), (β, 2), (β, 3) et une fois par les points (β, 4), (β, 4, 1). La surface Φ_2 est d'ordre $n-5$ et contient trois droites: la droite γ_{11} projection de la conique γ_{11}, la droite γ_{12} représentant le domaine de (α, 1, 2, 1) et γ_{22} représentant le domaine de (β, 4, 1).

Les courbes C_0^3 passent huit fois par A, une fois par (α, 1), ..., (α, 5), quatre fois par (β, 1), une fois par (β, 1, 1), (β, 1, 2), (β, 1, 3) et une fois par (β, 2), (β, 2, 1), (β, 2, 2). La surface Φ_3 d'ordre $n-7$ contient trois droites: la droite γ_{11}, la droite γ_{24} représentant le domaine de (β, 2, 2) et la droite γ_{23} représentant le domaine de (β, 1, 3).

Les courbes C_0^4 passent neuf fois par A, quatre fois par (α, 1), deux fois par (α, 1, 1), (α, 1, 1, 1), trois fois par (β, 1), une fois par (β, 2), (β, 2, 1), (β, 2, 2). La surface Φ_4 d'ordre $n-9$, contient deux droites γ_{12} et γ_{24}.

Les courbes C_0^5 passent onze fois par A, deux fois par (α, 1), une fois par (α, 1, 1). (α, 1, 1, 1), deux fois par (β, 1), (β, 1, 1), (β, 1, 2), ..., (β, 1, 5). La surface Φ_5 est d'ordre $n-11$ et contient deux droites γ_{12} et γ_{24} comptée deux fois.

Les courbes C_0^6 passent douze fois par A et une fois par les points (α, 1), (α, 1, 1), ..., (α, 1, 7), (β, 1), (β, 1, 1), (β, 1, 2), (β, 1, 3). La surface Φ_5 est d'ordre $n-12$ et contient deux droites γ_{13} représentant le domaine de (α, 1, 7) et γ_{23}.

14. Passons à l'involution d'ordre 19.

Les courbes C_0^1 passent trois fois par A, deux fois par (α, 1), ..., (α, 8) et une fois par (β, 1), ..., (β, 18). La surface Φ_1 est d'ordre

$n - 3$ et contient une conique γ_{11} et une droite γ_{21} représentant respectivement les domaines des points $(\alpha, 8)$ et $(\beta, 18)$.

Les courbes C_0^2 passent six fois par A, quatre fois par le point $(\alpha, 1)$, trois fois par le point $(\alpha, 2)$ et une fois par les points $(\alpha, 3), \ldots, (\alpha, 8)$, $(\alpha, 2, 1)$, $(\alpha, 2, 1, 1)$. Elles passent en outre deux fois par les points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, 6)$ et une fois par les points $(\beta, 7, 1), (\beta, 7, 1, 1)$. La surface Φ_2 est d'ordre $n - 5$ et contient trois droites: la droite γ_{11} projection de la conique γ_{11}, la droite γ_{12} représentant le domaine de de $(\alpha, 1, 2, 1, 1)$ et la droite γ_{22} représentant le domaine du point $(\beta, 7, 1, 1)$.

Les courbes C_0^3 passent neuf fois par A, trois fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\alpha, 1, 1)$, une fois par $(\alpha, 1, 2)$ et $(\alpha, 1, 2, 1)$, une fois par $(\alpha, 2)$, $\ldots, (\alpha, 8)$, trois fois par $(\beta, 1), \ldots, (\beta, 3)$, une fois par $(\beta, 4)$ et $(\beta, 4, 1)$, $(\beta, 4, 2)$. La surface Φ_3 est d'ordre $n - 7$ et contient trois droites: la droite γ_{11}, la droite γ_{13} et la droite γ_{23} représentant respectivement les domaines des points $(\alpha, 1, 2, 1)$ et $(\beta, 4, 2)$.

Les courbes C_0^4 passent onze fois par A, une fois par $(\alpha, 1), \ldots$, $(\alpha, 8)$, cinq fois par $(\beta, 1)$, trois fois par $(\beta, 2)$, une fois par $(\beta, 1, 1)$, $\ldots, (\beta, 1, 5), (\beta, 2, 1), (\beta, 2, 1, 1), (\beta, 2, 1, 2)$. La surface Φ_4 est d'ordre $n - 9$ et contient trois droites: la droite γ_{11}, les droites γ_{24} et γ_{25} représentant respectivement les domaines des points $(\beta, 1, 5), (\beta, 2, 1, 2)$.

Les courbes C_0^5 passent 12 fois par le point A, cinq fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par le point $(\alpha, 1, 1)$ et $(\alpha, 2)$, une fois par les points $(\alpha, 1, 2)$, $(\alpha, 1, 2, 1), (\alpha, 2, 1), (\alpha, 2, 1, 1)$, quatre fois par le point $(\beta, 1)$, trois fois par le point $(\beta, 2)$, une fois par les points $(\beta, 2, 1), (\beta, 2, 1, 1)$, $(\beta, (, 1, 2)$. La surface Φ_5 est d'ordre $n - 13$ et contient trois droites: les droites γ_{13}, γ_{12} représentant respectivement les domaines des points $(\alpha, 1, 2, 1)$ et $(\alpha, 2, 1, 1)$ et la droite γ_{25} représentant le domaine du point $(\beta, 2, 1, 2)$.

Les courbes C_0^6 passent 14 fois par A, trois fois par $(\alpha, 1)$ deux fois par $(\alpha, 2)$, une fois par $(\alpha, 2, 1), (\alpha, 2, 1, 1)$, cinq fois par $(\beta, 1)$, deux fois par $(\beta, 1, 1)$, une fois par $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$, $(\beta, 1, 4)$, une fois par $(\beta, 1, 1, 1)$, $(\beta, 1, 1, 2)$, $(\beta, 1, 1, 3)$. La surface Φ_1 contient la droite γ_{22} représentant le domaine du point $(\beta, 1, 2, 4)$ et la droite γ_{12}.

Les courbes C_0^7 passent 15 fois par A, quatre fois par $(\alpha, 1), (\alpha, 1, 1)$, deux fois par $(\alpha, 1, 2)$, $(\alpha, 1, 2, 1)$, quatre fois par $(\beta, 1)$, une fois par $(\beta, 1, 1), (\beta, 1, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 1, 3)$. La surface Φ_3 contient la droite γ_{13} comptée deux fois et la droite γ_{22} représentant le domaine de $(\beta, 1, 2, 3)$.

Les courbes C_0^8 passent 17 fois par A, deux fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1)$, une fois par $(\alpha, 1, 2)$, $(\alpha, 1, 2, 1)$, deux fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1), \ldots$, $(\beta, 1, 5)$. La surface Φ_5 est d'ordre $n - 17$ et contient les droites γ_{13}, γ_{24}, cette dernière comptée deux fois.

Les courbes C_0^9 passent 18 fois par A et une fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, 11)$, $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 5)$. La surface Φ_5 est d'ordre $n - 18$ et contient la droite γ_{14} représentant le domaine du point $(\alpha, 1, 11)$ et la droite γ_{24}.

Liège, le 23 janvier 1971.