Bulletin de la Classe des sciences

Relation entre les genres arithmétiques de deux surfaces en correspondance rationnelle

Lucien Godeaux

Résumé
Méthode pour déterminer la relation existant entre le genre arithmétique d'une surface et celui de la surface image d'une involution cyclique d'ordre premier n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à la première surface.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Relation entre les genres arithmétiques de deux surfaces en correspondance rationnelle

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Méthode pour déterminer la relation existant entre le genre arithmétique d'une surface et celui de la surface image d'une involution cyclique d'ordre premier n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à la première surface.

Considérons une surface algébrique F contenant une involution cyclique d'ordre premier p ne possédant qu'un nombre fini de points unis. Entre le genre arithmétique p_a de F et celui p'_a de la surface Φ image de l'involution, existe une relation que nous avons déterminée dans plusieurs cas. Nous avons dans notre ouvrage consacré aux involutions cycliques (1), indiqué une méthode qui permet dans chaque cas d'établir la relation, méthode que nous rappelons au début de cette note. Cette méthode exige la détermination du nombre de courbes d'un faisceau ayant un point double équivalentes à une courbe du faisceau ayant un point singulier d'une nature plus élevée. Cela conduit parfois à ces considérations assez délicates. Nous exposons ici une autre méthode, moins générale, mais qui peut néanmoins se révéler utile, comme nous le montrons par des exemples.

Nous partirons d'un modèle projectif de la surface F dont l'existence a été établie dans notre ouvrage cité plus haut.

(1) *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Edit. Cremonese, 1963).

1. Considérons une surface algébrique F, normale, appartenant à un espace S_r à r dimensions transformée en elle-même par une homographie H dont la période est un nombre premier impair p possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ dont le premier seul rencontre F, en un nombre fini de points. Sur la surface, l'homographie engendre une involution cyclique I possédant comme points unis les points de rencontre de F avec σ_p. Nous désignerons par r_0 la dimension de l'espace σ_0.

Le système des sections hyperplanes $| C |$ de la surface F contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I. L'un d'eux, $| C_0 |$, est dépourvu de points-base et ses courbes sont découpées par les hyperplans ξ_0 passant par les espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$.

Rapportons projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace à r_0 dimensions. Il correspond à la surface F une surface Φ image de l'involution I.

Les courbes C_0 passant par un point uni A de l'involution possèdent en ce point une certaine singularité et le point de diramation A′ qui lui correspond sur Φ est multiple pour cette surface. Ce point multiple est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de courbes rationnelles. Ces différentes questions peuvent être résolues par les méthodes indiquées dans notre ouvrage sur les involutions déjà cité.

Nous désignerons par n l'ordre de la surface Φ et par π le genre de ses sections hyperplanes Γ_0. La surface F est d'ordre pn et les courbes C sont de genre $p(\pi - 1) + 1$.

2. Entre le genre arithmétique p_a de F et celui p'_a de Φ existe une relation que l'on peut établir par la méthode indiquée dans notre ouvrage sur les involutions (p. 108 et suivantes). Elle consiste à déterminer la relation existant entre les invariants de Zeuthen-Segre J et J′ des surfaces F et Φ, ainsi que la relation entre leurs genres linéaires $p^{(1)}$ et $p'^{(1)}$. La formule de Noether

$$J + p^{(1)} = 12p_a + 9$$

conduit alors à la relation cherchée.

Rappelons que si sur une surface algébrique on a un faisceau de courbes algébriques de degré n et de genre π contenant δ courbes ayant un point double, l'invariant de Zeuthen-Segre de la surface a pour expression (1).

$$J = \delta - n - 4\pi.$$

Pour calculer l'invariant de Zeuthen-Segre J' de la surface Φ, considérons un faisceau de sections hyperplanes Γ_0. Si δ est la classe de la surface Φ, il y a δ courbes du faisceau ayant un point double, mais les courbes du faisceau passant par un point de diramation contiennent les courbes rationnelles équivalentes à ce point et équivalent donc à un certain nombre de points doubles. Soit X' le nombre de ces points. On a

$$J' = \delta + X' - n - 4\pi.$$

Le calcul de J se fait au moyen d'un faisceau de courbes C_0. A une courbe Γ_0 possédant un point double correspond une courbe C_0 possédant p points doubles. D'autre part il faut déterminer à quel nombre de courbes C_0 ayant un point double sont équivalentes les courbes du faisceau passant par les points unis de I. Soit X'' ce nombre. On a

$$J = p\delta + X'' - pn - 4p(\pi - 1) - 4.$$

On en déduit

$$J + 4 = p(J' + 4) + X,$$

où $X = X'' - pX'$.

Les courbes canoniques de Φ passent en général par les points de diramation et les courbes qui leur correspondent sur F passent par les points unis. On a donc une relation de la forme

$$p^{(1)} - 1 = p(p'^{(1)} - 1) + Y.$$

Par la formule de Noether, on a

$$12(p_a + 1) = 12p(p_a' + 1) + X + Y.$$

3. En un point uni de première espèce, les courbes C_0 acquièrent un point multiple d'ordre p à tangentes variables. En un point uni de seconde espèce, les courbes C_0 acquièrent un point multiple n'ayant que deux tangentes fixes.

---

(1) C. Segre, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiore algebrica* (Atti della Accademia di Torino, 1895-96, pp. 351-357), Opere (Rome Cremonese, 1957), tome I, pp. 312-326.

Dans le plan tangent en un point uni de seconde espèce A, l'homographie H détermine une homographie non homologique h que l'on peut représenter par les équations

$$x_0' : x_1' : x_2' = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^\alpha x_2,$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité, α un entier compris entre 1 et p, le point A ayant pour coordonnées $x_1 = x_2 = 0$. Chacune des droites $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ s'appuie sur un des axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$, ces deux axes étant distincts.

Notons que l'on peut représenter l'homographie h sous la forme

$$x_0' : x_1' : x_2' = x_0 : \eta^\beta x_1 : \eta x_2,$$

en posant $\eta = \varepsilon^\alpha$. Le nombre p étant premier, le nombre β compris entre 1 et p, est déterminé par

$$\alpha\beta \equiv 1, \qquad (\text{mod. } p).$$

La présence d'un point uni A de l'espèce indiquée intervient dans l'expression X + Y. Nous indiquerons par $\varphi(\alpha, \beta)$ la fonction de p en question. Notons que l'on a $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\beta, \alpha)$.

Projetons la surface F du point A sur un hyperplan ξ_0 ne passant pas par A. L'involution I' projection de I sur la surface F' ainsi obtenue possède un point uni de plus que l'involution I et précisément les points de rencontre des droites $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ avec l'hyperplan ξ_0. Soient A_1, A_2 ces points. Les autres points unis de I sont projetés sur F' suivant des points unis de même nature de l'involution I'.

La relation (1) n'a pas changé et si nous désignons par α', β' les entiers attachés au point A_1 et par α'', β'' ceux qui sont attachés au point A_2, l'expression $\varphi(\alpha', \beta') + \varphi(\alpha'', \beta'')$ doit remplacer $\varphi(\alpha, \beta)$ dans X + Y. On a donc

$$\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha', \beta') + \varphi(\alpha'', \beta''). \tag{2}$$

4. La nature des points unis A_1 et A_2 dépend évidemment de celle du point A.

Considérons la transformation

$$T_1 = \begin{pmatrix} x_0 x_1 & x_1^2 & x_0 x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} y_0^2 & y_0y_1 & y_1y_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

qui fait correspondre au point infiniment voisin de A sur la droite $x_2 = 0$ le point $y_1 = y_2 = 0$. A l'homographie h correspond l'homographie

$$y'_0 : y'_1 : y'_2 = y_0 : \varepsilon y_1 : \varepsilon^{\alpha-1} y_2.$$

On en conclut qu'au point A_1 sont associés les nombres $\alpha' = \alpha - 1$ et β' déterminé par la congruence

$$\beta'(\alpha - 1) \equiv 1. \qquad (\text{mod. } p)$$

La transformation

$$T_2 = \begin{pmatrix} x_0x_2 & x_0x_1 & x_2^2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est

$$T_2^{-1} = \begin{pmatrix} z_0^2 & z_1z_2 & z_0z_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

fait correspondre au point infiniment voisin de A sur la droite $x_1 = 0$ le point $y_1 = y_2 = 0$. A l'homographie h correspond l'homographie

$$z'_0 : z'_1 : z'_2 = z_0 : \eta^{\beta-1} z_1 : \eta z_2.$$

Au point A_2 sont donc attachés les nombres α'', $\beta'' = \beta - 1$, le premier étant déterminé par la congruence

$$\alpha''(\beta - 1) \equiv 1. \qquad (\text{mod } p.)$$

La formule (2) devient

$$\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha - 1, \beta') + \varphi(\alpha'', \beta - 1). \tag{3}$$

5. Nous allons appliquer cette relation à deux exemples.

Considérons un point uni A auquel sont attachés les nombres $\alpha = p - 1, \beta = p - 1$. Ce point est donc ce que nous avons appelé un point uni symétrique.

La formule (3) donne, à cause de la symétrie,

$$\varphi(p - 1, p - 1) = 2\varphi(p - 2, \beta').$$

On sait que l'on a

$$\varphi(p-1)p-1) = -(p^2-1)$$

et d'autre part on trouve facilement en posant $p = 2\nu + 1$, $\beta' = \nu$, donc

$$\varphi(p-2, \nu) = -2\nu(\nu+1) = -\frac{1}{2}(p-1)(p+1).$$

6. Nous avons établi [1] que l'on a

$$\varphi(2, \nu+1) = \frac{1}{2}(p-1)(p-11) = 2\nu(\nu-5).$$

La formule (3) donne

$$\varphi(2, \nu+1) = \varphi(1, \beta') + \varphi(\alpha'', \nu).$$

On trouve aisément $\beta' = 1$ et le point correspondant est un point uni de première espèce. On sait que l'on a

$$\varphi(1, 1) = (p-1)(p-5).$$

On a d'autre part $\alpha'' = p - 2$, donc

$$\varphi(p-2, \nu) = \frac{1}{2}(p-1)(p-11) - (p-1)(p-5)$$

et

$$\varphi(p-2, \nu) = -\frac{1}{2}(p-1)(p+1) = -2\nu(\nu+1),$$

expression trouvée au n° 5.

7. Il résulte de ce qui précède et cela avait été d'ailleurs signalé antérieurement par M. B. Segre [2] que l'expression $\varphi(\alpha, \beta)$ ne dépend pas de la nature de la surface F. Si celle-ci est un plan ($p_a = 0$ et $p'_a = 0$), l'homographie H, non homologique, aura trois points unis, isolés. Si $\varphi(\alpha, \beta)$, $\varphi(\alpha', \beta')$, $\varphi(\alpha'', \beta'')$ sont les polynomes en p associés à ces points, on aura

$$12(p-1) + \varphi(\alpha, \beta) + \varphi(\alpha', \beta') + \varphi(\alpha'', \beta'') = 0.$$

---

(1) *Nouvelles recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1970, pp. 1111).

(2) B. Segre, *Some proprieties of differentiable varieties and transformations* (Berlin, Springer, 1957).

Si par exemple on a $\alpha = \beta = p - 1$, l'homographie H a pour équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = x_d : \varepsilon x_1 : \varepsilon^{p-1} x_2,$$

ou

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = x_0 : \eta^{p-1} x_1 : \eta x_2,$$

où $\eta = \varepsilon^{p-1}$.

Le point $x_0 = x_2 = 0$ est uni pour l'homographie

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = \varepsilon x_0 : x_1 : \varepsilon^{p-2} x_2,$$

et on a $\alpha' = p - 2$, $\beta' = 2$.

Le point $x_0 = x_1 = 0$ est uni pour l'homographie

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = \varepsilon x_0 : \varepsilon^2 x_1 : x_2,$$

et on a $\alpha'' = 2$, $\beta'' = p - 2$.

On doit donc avoir

$$12(p - 1) + \varphi(p - 1, p - 1) + 2\varphi(2, p - 2) = 0$$

et comme on a

$$\varphi(p - 1, p - 1) = -(p^2 - 1), \varphi(2, p - 2) = \frac{1}{2}(p - 1)(p - 11),$$

la relation précédente est une identité.

Liège, le 27 décembre 1971.