Revue des publications italiennes récentes sur la balistique rationnelle. II.

I. — Fubini. Quelques formules de balistique extérieure. Application au problème de la correction du tir (1).

Dans ce mémoire, M. Fubini débute par une critique de l'application de la méthode de Siacci au tir courbe. Il aborde ensuite le problème de la correction du tir, qu'il pose de la manière suivante : Supposons que l'on connaisse une trajectoire correspondant à une vitesse initiale V et à un angle de projection φ. Si l'angle de projection devient $\varphi + d\varphi$, ou si la vitesse initiale devient $V + dV$, quel est l'effet produit sur la trajectoire? Les deux cas (variation de φ et variation de V) sont d'ailleurs ramenés l'un à l'autre. L'auteur donne une première solution du problème en utilisant la méthode de Siacci et ensuite une seconde solution beaucoup plus générale. Il établit notamment une équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la portée X (sur un plan horizontal) considérée comme fonction des éléments initiaux V et φ.

Critique de la méthode de Siacci. — Représentons par :

φ l'angle de projection,

V la vitesse initiale,

C le coefficient balistique,

i l'indice de forme du projectile,

θ l'inclinaison de la trajectoire en un point,

v la vitesse en un point,

$u = \dfrac{v\cos\theta}{\cos\varphi}$ la pseudo-vitesse en un point,

$F(v)$ la fonction résistante de l'air,

δ_y la densité de l'air à l'altitude y,

δ_0 la densité de l'air à l'origine de la trajectoire,

les axes Ox, Oy de référence étant placés comme d'habitude.

L'équation de l'hodographe est

$$gd(v\cos\theta) = \frac{\delta_y i}{C} vF(v)d\theta.$$

(1) G. Fubini. *Alcune formole di balistica esterna con speciale riguardo al problema della correzione del tiro.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem. 1917, pp. 151-161.

Posons

$$\mathrm{K}(u) = \frac{1}{u^2}\,\mathrm{F}(u), \qquad \xi_2(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^3\theta},$$

$$\mathrm{J}(u) = -\,2g\int \frac{du}{u\mathrm{F}(u)} \quad \text{(fonction J de Siacci).}$$

On a

$$\xi_2(\theta) - \xi_2(\varphi) = -\,\frac{\mathrm{C}}{2i\,\delta_0\,\gamma\cos^2\varphi}\Big[\mathrm{J}(u) - \mathrm{J}(\mathrm{V})\Big], \qquad (1)$$

où γ est une valeur intermédiaire de $\dfrac{\delta_y}{\delta_0}\,\dfrac{\mathrm{K}(v)}{\mathrm{K}(u)}$.

Le paramètre γ est lié au paramètre β de Siacci pour la relation $\beta = \dfrac{\gamma}{\cos\theta}$. L'étude de γ sera donc analogue à celle de β.

Si l'on considère l'équation (1) comme définissant γ, l'équation de l'hodographe donne

$$\frac{d\left[\dfrac{1}{\gamma}\Big\{\mathrm{J}(u) - \mathrm{J}(\mathrm{V})\Big\}\right]}{du} = -\,2\,\frac{\delta_0}{\delta_y}\,\frac{g}{u^2\mathrm{K}(v)}. \qquad (2).$$

Le coefficient β de Siacci satisfait à une équation analogue, un peu plus compliquée.

Si sans l'équation (2), on suppose $\delta_y = \delta_0$, $\mathrm{K}(u) = \mathrm{K}(v)$, on trouve $\gamma = c^{te}$, et c'est cette hypothèse que l'on fait au fond dans la méthode de Siacci. Or, dans le cas du tir courbe, $\dfrac{\delta_y}{\delta_0}$ peut différer sensiblement de l'unité et v différer de même de u. Il en résulte que, dans le cas du tir courbe, la méthode de Siacci semble peu acceptable.

La méthode des approximations successives conduirait à déduire de l'équation (1) la valeur de θ pour $\gamma = 1$. Puis, portant cette valeur de θ dans (2), on en déduirait une valeur γ_1 de γ. L'équation (1) donnerait alors une nouvelle valeur θ_1 de θ, correspondant à la valeur γ_1 de γ et ainsi de suite. En sorte que la méthode de Siacci apparaît comme se limitant au premier terme de la série obtenue en partant des équations (1) et (2) par la méthode classique des approximations successives.

Correction du tir lorsque l'on applique la méthode de Siacci.— Si, en conservant la méthode de Siacci, on veut trouver une relation entre $d\varphi$ et les variations dx, dy des coordonnées d'un point de la trajectoire, on peut prendre, comme coefficient balistique principal, la valeur constante $\mathrm{C}' = \dfrac{\Gamma}{\cos^n\varphi}$. On obtient alors, en partant des équations classiques de Siacci, la formule

$$d\varphi = \frac{dy - \mathrm{tg}\,\theta'\,dx}{x\{1 - (n+1)\,\mathrm{tg}^2\varphi\} + (n+2)\,y\,\mathrm{tg}\,\varphi + n\,(y - x\,\mathrm{tg}\,\theta')\,\mathrm{tg}\,\varphi}$$

où θ' est l'angle donné par l'équation de Siacci,

$$\text{tg}\,\theta - \text{tg}\varphi = -\frac{C'_\theta}{2\cos^2\varphi}\left[J(u) - J(V)\right]$$

lorsque l'on y fait $C'_\theta = C'$.

Remarquons que la formule donnant $d\varphi$ ne dépend que de n.

La critique des hypothèses faites pour arriver à cette formule, dit M. Fubini, permet à un théoricien d'élever de graves doutes sur son exactitude et conseille d'affronter le problème de la correction du tir par une autre voie.

Nouvelle formule de correction du tir. — Supposons calculée une trajectoire correspondant aux éléments initiaux V, φ. Quel est l'effet produit lorsque l'angle φ devient $\varphi + d\varphi$? Remarquons tout d'abord que tirer de l'origine O avec les éléments V, $\varphi + d\varphi$ équivaut à tirer d'un point O' de la trajectoire (ou de son prolongement si $d\varphi < o$) où l'inclinaison est égale à φ, avec la vitesse $V - dV$ acquise par le projectile en passant de O à O', dV ayant le même signe que $d\varphi$. Donc, pour calculer la trajectoire (V, $\varphi + d\varphi$), il suffit de calculer la trajectoire ($V - dV$, φ) et d'ajouter aux coordonnées de chacun de ses points celles de O' par rapport à O.

Si le but atteint par le trajectoire (V, φ) a pour coordonnées (x_0, y_0), on déterminera $d\varphi$ de manière à ce que la trajectoire (V, $\varphi + d\varphi$) atteigne le but ($x_0 + dx$, $y_0 + dy$). Si ξ, η sont les coordonnées de O', cela équivaut à déterminer dV de manière à ce que la trajectoire ($V - dV$, φ) atteigne le but ($x_0 + dx - \xi$, $y_0 + dy - \eta$).

On ne tiendra pas compte, en première approximation, de la différence de densité de l'air en O et O'.

La trajectoire (V, φ) a comme tangente au point (x_0, y_0) la droite

$$y - y_0 = (x - x_0)\,\text{tg}\,\theta,$$

et dans le voisinage de ce point, on peut assimiler cette droite à la trajectoire. Soit

$$y - y_0 = \text{tg}\,\theta\,(x - x_0) - \{a(x - x_0) + b\}\,dV \tag{3}$$

l'équation analogue pour la trajectoire ($V - dV$, φ). On en déduit, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, que l'accroissement de portée $dX = x_0 - x$, sur le plan horizontal $y = y_0$, est $dX = -\frac{b}{\text{tg}\,\theta}dV$. On a donc $b = -\text{tg}\,\theta\,\frac{dX}{dV}$ (tg θ est négative sur la branche descendante de la trajectoire). On peut donc déterminer le coefficient b connaissant l'accroissement de portée correspondant à un accroissement dV de la vitesse initiale.

On doit maintenant chercher $d\varphi$ de manière à ce que le point ($x_0 + dx - \xi$, $y_0 + dy - \eta$) soit sur la droite (3). En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, on trouve

$$dy - \eta = \text{tg}\,\theta\,(dx - \xi) - b\,dV.$$

Or, les équations du mouvement du projectile donnent

$$g \cos \varphi \, d\,V = V \left\{ g \sin \varphi + \frac{\delta\, i}{C} F(v) \right\} d\,\varphi,$$

$$g\,\xi = v^2 d\,\varphi, \qquad g\,\eta = v^2 \operatorname{tg} \varphi \, d\,\varphi.$$

Par suite, on a

$$d\,\varphi = g \frac{dy - \operatorname{tg} \theta \, dx}{V^2 (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta) - bV \left(g \operatorname{tg} \varphi + \frac{\delta\, i}{C} F(V) \frac{1}{\cos \varphi} \right)}. \quad (1).$$

Cette formule a été obtenue sous la seule hypothèse que l'on néglige les infiniment petits du second ordre.

Une formule plus approchée pourra être obtenue en substituant à la trajectoire, dans le voisinage de (x_0, y_0) et de l'origine, des paraboles au lieu de droites.

Application de la formule (4). — La formule (4) permet de passer d'une table de tir donnant les portées sur un plan horizontal à une table de tir donnant les portées relatives à des buts non situés sur le plan de l'horizon. Il suffira de prendre, comme « fausse origine » O' le point de la trajectoire de même altitude que le but. Mais il faudra alors tenir compte des variations de densité de l'air. Les calculs numériques se réduisent aux calculs de la trajectoire $O\,O'$. M. Fubini, qui les a effectués sur des exemples particuliers, les dit assez simples, surtout si la différence de vitesse entre O et O' est minime.

Liaison entre la portée X et les éléments initiaux V, φ. — Si, dans la formule (4), on suppose $dy = 0$, on obtient l'accroissement $d\,\varphi$ de l'angle de projection correspondant à l'accroissement de portée dx (que l'on représente par dX) sur le plan y = constante, la vitesse initiale étant V. Si l'on considère la portée X comme fonction des éléments initiaux V, φ, on obtient donc, en remplaçant b par sa valeur, une liaison entre $\frac{\partial X}{\partial V}$ et $\frac{\partial X}{\partial \varphi}$, exprimée par l'équation aux dérivées partielles

$$V^2 \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \theta} \right) = g \frac{\partial X}{\partial \varphi} + \frac{\partial X}{\partial V} V \left[g \operatorname{tg} \varphi + \frac{\delta\, i}{C} \frac{F(V)}{\cos \varphi} \right]. \quad (5).$$

Cette équation peut être vérifiée directement.

Appelons θ' la valeur de θ au point de chute et remarquons que l'équation de l'hodographe donne v en fonction de V, φ et θ. On a :

$$y = -\frac{1}{g} \int_{\varphi}^{\theta'} v^2 \operatorname{tg} \theta \, d\,\theta, \qquad X = -\frac{1}{g} \int_{\varphi}^{\theta'} v^2 d\,\theta.$$

On en déduit :

$$-g \frac{\partial y}{\partial \theta'} = v^2 \operatorname{tg} \theta' \qquad , -g \frac{\partial y}{\partial V} = \int_{\varphi}^{\theta'} \frac{\partial (v^2)}{\partial V} \operatorname{tg} \theta \, d\,\theta,$$

$$-g \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -V^2 \operatorname{tg} \varphi + \int_{\varphi}^{\theta'} \frac{\partial (v^2)}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \theta \, d\,\theta.$$

Si $y =$ constante, θ' pourra être considéré comme fonction de V et de φ et on aura :

$$d\theta' = -\frac{1}{v^2 \operatorname{tg}\theta'}\left\{\left[\int_\varphi^{\theta'} \frac{\partial (v^2)}{\partial V} \operatorname{tg}\theta\, d\theta\right] dV + \right.$$

$$\left. + \left[- V^2 \operatorname{tg}\varphi + \int_\varphi^{\theta'} \frac{\partial (v^2)}{\partial \varphi} \operatorname{tg}\theta\, d\theta\right] d\varphi\right\}.$$

X est fonction de V, φ, θ', donc, si $y =$ constante, fonction de V, φ. On a par suite :

$$\frac{\partial X}{\partial V} = -\frac{1}{g}\int_\varphi^{\theta'} \frac{\partial (v^2)}{\partial V}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta'}\right) d\theta,$$

$$g \frac{\partial X}{\partial \varphi} = V^2\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\theta'}\right) - \int_\varphi^{\theta'} \frac{\partial (v^2)}{\partial \varphi}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta'}\right) d\theta.$$

Le second membre de (5) devient alors :

$$V^2\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\theta'}\right) - 2\int_\varphi^{\theta'} v\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta'}\right)\left\{\frac{\partial v}{\partial V} V\left[\operatorname{tg}\varphi + \frac{\delta i}{Cg}\frac{F(V)}{\cos\varphi}\right] + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right\} d\theta.$$

Par conséquent, (5) sera vérifié si l'on a :

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} g \cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial V} V\left[g \sin\varphi + \frac{\delta i}{C} F(V)\right] = 0, \quad (6).$$

quel que soit θ.

Or, les valeurs de V, φ qui font correspondre à une même valeur de θ une même valeur de v, vérifient l'équation

$$g \cos\varphi\, dV = V\left[g \sin\varphi + \frac{\delta i}{C} F(V)\right] d\varphi.$$

Quand V et φ varient en vérifiant cette dernière équation, la valeur de v, correspondant à une valeur de θ, ne varie pas (puisque sa différentielle est nulle). La formule (5) est donc vérifiée.

De la formule (5), on peut déduire, quand on connaît $\frac{\partial X}{\partial \varphi}$, l'effet $\frac{\partial X}{\partial V} dV$ produit par un changement de la charge, et inversement. En dérivant l'équation (5), on pourra résoudre le même problème en tenant compte des termes du second ordre.

L'altitude Y sur un plan $x =$ constante, considérée comme fonction de V et de φ, satisfait de même à l'équation aux dérivées partielles

$$V^2 (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta) = g \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial y} V\left[g \operatorname{tg}\varphi + \frac{\delta i}{C}\frac{F(V)}{\cos\varphi}\right].$$

IV. — FUBINI. OBSERVATIONS SUR LE CALCUL DE LA TRAJECTOIRE D'UN PROJECTILE (1).

Ces observations de M. Fubini portent sur trois points :

1° Généralisations de la méthode de Siacci, utilisables dans

(1) G. FUBINI. *Osservazioni sul calcolo della traiettoria di un proietto.* Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1917, pp. 214-219.

le cas où la différence d'altitude entre l'origine de la trajectoire et le but est considérable (cas rencontré fréquemment par les artilleurs italiens durant la dernière guerre);

2° Perfectionnements à apporter au calcul de la densité moyenne de l'air dans le calcul d'une trajectoire par arcs;

3° Calcul rapide, au moyen de la formule de Taylor, de la trajectoire du mortier italien de 210, donnant une approximation non inférieure au calcul effectué par des méthodes plus compliquées.

Généralisations de la méthode de Siacci. — Dans de telles généralisations, M. Fubini croit préférable d'éviter l'usage de fonctions de deux variables, car cela conduirait à des tables numériques à triple entrée, peu maniables en pratique. Il se limitera donc à des fonctions d'une variable.

La méthode de Siacci consiste théoriquement en ceci : Pour trouver quelques-unes des courbes satisfaisant à l'équation différentielle

$$dy = f(x, y)dx,$$

on considère une fonction $X(x)$ de x seul et une fonction $Y(y)$ de y seul, et on écrit

$$\frac{dy}{Y} = \frac{X}{Y} f(x, y) \frac{dx}{X}.$$

On en déduit

$$\int \frac{dy}{Y} = \beta \int \frac{dx}{X},$$

où β est une valeur intermédiaire convenable de $\frac{X}{Y} f(x,y)$.

Le résultat sera d'autant meilleur que les limites entre lesquelles varie β sur la courbe considérée seront plus rapprochées.

Cela étant posé, représentons par $w = v \cos\theta$ la vitesse horizontale et introduisons une nouvelle variable ω en écrivant $w = \psi(\omega)$. La fonction ψ est arbitraire; pour chaque forme particulière de cette fonction, on obtiendra des formules de tir particulières. M. Fubini considère, pour fixer les idées, $\psi(\omega) = a + b\omega$, a et b étant les constantes à déterminer.

L'équation de l'hodographe

$$Cg dw = i\delta_y v F(v) d\theta$$

donne, par intégration,

$$\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi = -\frac{Cb}{2\delta_0 i\beta} [J(\omega) - J(\Omega)],$$

où β est une valeur intermédiaire de

$$\beta' = \frac{\delta_y}{\delta_0} \frac{vF(v)}{\omega F(\omega)} \cos^2\theta,$$

Ω est la valeur initiale de ω ($V\cos\varphi = a + b\Omega$), J représente la fonction de Siacci.

L'application de la méthode de Siacci donne ensuite

$$x = \frac{C}{\delta_0 i\beta}\{\Delta(\omega) - \Delta(\Omega)\},$$

où

$$\Delta(\omega) = \frac{a^2b}{2g} J(\omega) + 2ab^2 T(\omega) + b^3 D(\omega),$$

$$D(\omega) = -\int \frac{\omega\, d\omega}{F(\omega)}, \qquad T(\omega) = -\int \frac{d\omega}{F(\omega)}.$$

Posant

$$B = \int J\, dT,$$

on a

$$\frac{y}{x} - \operatorname{tg}\varphi = -\frac{Cb}{2\delta_0 i\beta}\left\{\frac{a(\omega) - a(\Omega)}{\Delta(\omega) - \Delta(\Omega)} - I(\Omega)\right\},$$

où

$$a(\omega) = \frac{1}{2}\frac{a^2b}{2g}[J(\omega)]^2 + 2ab^2 B(\omega) + b^2 A(\omega),$$

$$A(\omega) = -\int \frac{J(\omega)\,\omega\, d\omega}{F(\omega)}.$$

A part B (ω), toutes les fonctions utilisées sont celles de Siacci ou se déduisent de celles-ci. En vue des calculs numériques, il suffira donc de déterminer a, b. A cet effet, on pourra, par exemple, choisir deux points de la trajectoire (calculés approximativement par une autre méthode) où l'on aura $\beta' = 1$, ou bien choisir trois points de la trajectoire où β' aura une même valeur, ou encore toute autre manière permettant d'apprécier une valeur moyenne de β'. Ce procédé, utilisé deux ou plusiers fois de suite, transforme la méthode de Siacci en une méthode d'approximations successives, utilisable dans les calculs numériques.

Densité moyenne de l'air pour un arc de trajectoire. — Dans le calcul d'une trajectoire par point, on est amené, si l'on applique soit les méthodes de Siacci, soit la méthode d'Euler, où l'on suppose F (v) proportionnel à une puissance de la vitesse, à évaluer l'intégrale

$$L = \int_\varphi^\theta \frac{\delta_y}{\delta_0}\frac{d\theta}{\cos^n\theta}.$$

M. Fubini remarque que l'on a

$$\frac{\delta_y}{\delta_0} = 1 - hy,$$

où h est une constante qui, dans les conditions habituelles, est égale à 0,00008. Etant donné la petitesse de h, on peut, dans le calcul de L, prendre une valeur même peu approchée de y.

Si l'on prend $y = a + b \operatorname{tg} \theta + c \operatorname{tg}^2 \theta$, a, b, c étant des constantes, on trouve

$$L = (1 + hc - ha)\left[\xi_{n-1}(\theta) - \xi_{n-1}(\varphi)\right] - hc\left[\xi_{n+1}(\theta) - \xi_{n+1}(\varphi)\right] - \frac{hb}{n}\left[\sec^n\theta - \sec^n\varphi\right],$$

où

$$\xi_m(\theta) = \int \frac{d\theta}{\cos^{m+1}\theta}.$$

Comme il existe des tables numériques de ξ_m, le problème pourra être considéré comme résolu, une fois les constantes a, b, c déterminées. Ceci peut être fait de plusieurs manières : soit en calculant le développement de y en série procédant suivant les puissances de $\operatorname{tg}\theta$, soit en substituant à la trajectoire une courbe moyenne entre deux paraboles, l'une qui serait décrite dans le vide par le projectile partant du début de l'arc étudié, l'autre qui serait décrite dans le vide par le projectile de manière à arriver à la fin de l'arc étudié dans les mêmes conditions que le projectile réel (même inclinaison, même vitesse).

Application du développement de Taylor. — En étudiant la trajectoire du mortier de 210 (1), M. Fubini a remarqué qu'en développant x, y, par la formule de Taylor, on arrive à des résultats aussi approchés que ceux obtenus par d'autres méthodes plus compliquées. Ces séries procèdent suivant les puissances de $\operatorname{tg}\theta$ ou encore de θ. Ainsi, si l'on considère le développement de x suivant les puissances de θ, et si l'on se limite à un arc de trajectoire où $F(v)$ est proportionnel à v^n, on trouve que, en s'arrêtant au troisième terme, l'erreur commise est moindre que $\frac{T}{24} a^4 \left(\frac{\pi}{180}\right)^4$, a étant le nombre de degrés dont a varié θ le long de l'arc considéré, T étant le maximum de

$$2\frac{v^2}{g}\Big\{4 \operatorname{tg}\theta\,(2 + 3 \operatorname{tg}^2\theta) + \left[HF \sec\theta\right]\left[(n+7) + (n^2 + 9n + 26 \operatorname{tg}^2\theta\right] + 3\left[HF \sec\theta\right]^2 (n+2)(n+3) \operatorname{tg}\theta + 2(n+1)(n+2)\left[HF \sec\theta\right]^3\Big\},$$

$$H = \frac{i\,\delta y}{Cg}.$$

Par cette méthode, M. Fubini a calculé les trajectoires du mortier en question.

(*A suivre.*)

Lucien GODEAUX,
Lieut. de réserve du 18e Rég^t d'Artillerie
Professeur à l'Ecole Militaire.

---

(1) Le mortier italien de 210 est une pièce de 10 calibres de longueur, à 36 rayures gauchères progressives. La vitesse initiale est de 263m/sec. Cf. G. MADASCHI. *Santo descrittivo del Materiale d'artiglieria italiano* Texte et atlas). Torino, 1916.