

Revue des publications italiennes récentes sur la balistique rationnelle. III.

V. — PICONE. FORMULES RATIONNELLES POUR LA CORRECTION DU TIR (1).

Pendant la guerre, M. Picone fut chargé de construire des tables de tir, pour pièces de moyen et de gros calibre, destinées aux tirs en montagne. Ces tables fournissaient les éléments de tir sur des points déterminés par leurs distances horizontale x , et verticale z à la pièce (z variant de -1.000 m. à $+2.000$ m.), ainsi que trois coefficients de correction. Dans ce travail, M. Picone expose la méthode suivie pour le calcul de ces coefficients.

Désignons par *altitude balistique* d'un point donné à un instant déterminé l'altitude correspondant, dans les tables de Saint-Robert, à une densité moyenne de l'air égale à la densité de l'air au point considéré à cet instant.

Soient h_0 l'altitude balistique (de la pièce) utilisée pour le calcul des tables de tir, h celle de la pièce avec laquelle le tir doit s'effectuer. On devra prendre, dans les tables, les éléments initiaux correspondant au point $(x - \Delta x, z)$, la partie principale de Δx étant fournie par $H(h - h_0)$, H étant un coefficient, fonction de x, z , donné par la table utilisée.

D'autre part, pour tirer sur un point $(x + \Delta x, z + \Delta z)$, x et z étant les nombres les plus rapprochés de $x + \Delta x, z + \Delta z$ (par excès ou par défaut) figurant dans la table, on devra corriger les éléments initiaux relatifs au tir sur le point (x, z) , d'une quantité $A \Delta x + B \Delta z$, les coefficients A, B , fonctions de x, z , étant donnés par la table.

C'est au calcul des coefficients H, A, B qu'est consacré le mémoire de M. Picone. La méthode utilisée est basée sur l'étude des équations aux variations, introduites dans la science par H. Poincaré à l'occasion de ses recherches de Mécanique Céleste.

(1) MAURO PICONE, *Formole razionali per la correzione del tiro*. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1916-1917, t. LII, pp. 430-449.

Equations aux variations pour la trajectoire. — La résistance de l'air étant supposée directe, le centre de gravité du projectile se meut dans le plan vertical passant par le vecteur-vitesse à l'origine. Ce mouvement sera rapporté à un axe des x horizontal, situé au niveau de la mer et dirigé dans le sens du mouvement et à un axe des y , vertical, dirigé vers le haut et passant par l'origine du mouvement étudié.

Les équations de la trajectoire du centre de gravité étudié sont

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dv}{d\theta} = v \operatorname{tg} \theta - \frac{\delta(y)}{\cos \theta} \Phi(v), \\ \frac{dx}{d\theta} = -\frac{v^2}{g}, \\ \frac{dy}{d\theta} = -\frac{v^2}{g} \operatorname{tg} \theta, \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$(2) \quad \begin{cases} v = V, \\ x = 0, \\ y = h, \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \theta = \varphi, \end{array} \right.$$

où x, y sont les coordonnées du point en mouvement,

v la vitesse de ce point,

θ l'inclinaison de la tangente en ce point sur Ox ,

$\delta(y)$ la densité de l'air au point (x, y) ,

g l'accélération de la pesanteur (supposée constante),

$\Phi(v) = \frac{iv}{gC} F(v)$, $F(v)$ étant la fonction de résistance de l'air,

i le coefficient de forme,

C le coefficient balistique,

V la vitesse initiale,

φ l'angle de projection,

h l'altitude balistique à l'origine de la trajectoire.

Supposons que nous connaissions une trajectoire correspondant aux points initiaux (V, φ, h) , c'est-à-dire que nous connaissions x, y, v en fonction de ces éléments. Supposons que l'une des quantités V, φ, h vienne à varier et désignons-la par λ . Soit $\Delta\lambda$ sa variation. Les parties principales $\Delta v, \Delta x, \Delta y$ des variations correspondantes de v, x, y sont respectivement

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial \lambda} \Delta \lambda, \quad \Delta x = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \Delta \lambda, \quad \Delta y = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \Delta \lambda.$$

Les fonctions inconnues de θ ,

$$u(\theta) = \frac{\partial v}{\partial \lambda}, \quad \xi(\theta) = \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \quad \eta(\theta) = \frac{\partial y}{\partial \lambda},$$

satisfont aux équations, aux variations

$$(3) \begin{cases} \frac{du}{d\theta} = p(\theta) \cdot u - \alpha q(\theta) \eta, \\ \frac{d\xi}{d\theta} = r(\theta) \cdot u, \\ \frac{d\eta}{d\theta} = s(\theta) \cdot u, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$p(\theta) = \operatorname{tg} \theta + \frac{\delta(\gamma)}{\cos \theta} \Phi'(v), \quad q(\theta) = \frac{\Phi(v)}{\cos \theta}, \\ r(\theta) = -\frac{2v}{g}, \quad s(\theta) = -\frac{2v}{g} \operatorname{tg} \theta,$$

et où α représente la valeur moyenne de $\delta(\gamma)$ le long de la trajectoire. [On déduit de la table de Saint-Robert que $\delta(\gamma)$ a une valeur sensiblement constante, comprise entre 0 et 0,000095. En remplaçant $\delta(\gamma)$ par $-\alpha$, on commet donc une erreur négligeable.]

Les fonctions $p(\theta)$, $q(\theta)$, $r(\theta)$, $s(\theta)$ sont connues. On aura de plus, pour les fonctions $u(\theta)$, $\xi(\theta)$, $\eta(\theta)$ des conditions initiales que nous représenterons par

$$u(\varphi) = c, \quad \xi(\varphi) = a, \quad \eta(\varphi) = b,$$

les constantes a, b, c étant déterminées par la nature de λ .

En utilisant alors la méthode des approximatives successives, on exprime u, ξ, η sous formes de séries infinies, convergentes, procédant suivant les puissances successives de α ,

$$\begin{aligned} u &= u_0(\theta) + \alpha u_1(\theta) + \dots + \alpha^n u_n(\theta) + \dots, \\ \xi &= \xi_0(\theta) + \alpha \xi_1(\theta) + \dots + \alpha^n \xi_n(\theta) + \dots, \\ \eta &= \eta_0(\theta) + \alpha \eta_1(\theta) + \dots + \alpha^n \eta_n(\theta) + \dots \end{aligned}$$

Les coefficients sont déterminés par les équations

$$(4) \quad \frac{du_0}{d\theta} = p \cdot u_0, \quad \frac{d\xi_0}{d\theta} = r \cdot u_0, \quad \frac{d\eta_0}{d\theta} = s \cdot u_0,$$

avec les conditions initiales

$$u_0(\varphi) = c, \quad \xi_0(\varphi) = a, \quad \eta_0(\varphi) = b;$$

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \frac{du_{n+1}}{d\theta} &= p \cdot u_{n+1} - q \eta_n, \\ \frac{d\xi_{n+1}}{d\theta} &= r \cdot u_{n+1}, \\ \frac{d\eta_{n+1}}{d\theta} &= s \cdot u_{n+1}, \end{aligned} \right\} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

avec les conditions initiales

$$u_{n+1}(\varphi) = \xi_{n+1}(\varphi) = \eta_{n+1}(\varphi) = 0.$$

On pourra donc déterminer ces coefficients par des quadra-

tures. Etant donnée la petitesse de α , on pourra se limiter aux premiers termes des séries.

Il reste maintenant à donner à λ les différentes significations h, V, φ .

Variation de l'altitude balistique à l'origine de la trajectoire.

— Si nous prenons $\lambda = h, V$ et φ restant constants, les conditions initiales a, b, c deviennent $a = 0, b = 1, c = 0$.

Les équations (4) donnent alors $u_0(\theta) = 0, \xi_0(\theta) = 0, \eta_0(\theta) = 1$. Les équations (5) deviennent pour $n = 0$,

$$\frac{du_1}{d\theta} = pu_1 - q, \quad \frac{d\xi_1}{d\theta} = ru_1, \quad \frac{d\eta_1}{d\theta} = s.u_1.$$

En posant

$$P(\theta) = e^{-\int_{\varphi}^{\theta} p(t)dt},$$

elles donnent

$$u_1(\theta) = -\frac{1}{P(\theta)} \int_{\varphi}^{\theta} P(t)q(t)dt,$$

$$\xi_1(\theta) = \int_{\varphi}^{\theta} r(t)u_1(t)dt,$$

$$\eta_1(\theta) = \int_{\varphi}^{\theta} s(t)u_1(t)dt.$$

En se limitant aux deux premiers termes des séries, on a donc

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta v = \alpha u_1(\theta). \Delta h, & \Delta x = \alpha \xi_1(\theta). \Delta h, \\ \Delta y = \Delta h + \alpha \eta_1(\theta). \Delta h. \end{cases}$$

Variation de la vitesse initiale. — Supposons $\lambda = V, h$ et φ constants. Les conditions initiales deviennent $a = 0, b = 0, c = 1$. On a

$$u_0(\theta) = \frac{1}{P(\theta)}, \quad \xi_0(\theta) = \int_{\varphi}^{\theta} \frac{r(t)}{P(t)} dt, \quad \eta_0(\theta) = \int_{\varphi}^{\theta} \frac{s(t)}{P(t)} dt,$$

et en se limitant au premier terme de chaque série,

$$(7) \quad \Delta v = u_0(\theta) \Delta V, \quad \Delta x = \xi_0(\theta). \Delta V, \quad \Delta y = \eta_0(\theta). \Delta V.$$

Variation de l'angle de projection. — Supposons $\lambda = \varphi, h$ et V étant constants. On a cette fois, pour les conditions initiales, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à $\Delta \varphi$,

$$c = -V \operatorname{tg} \varphi - \frac{\delta(h)}{\cos \varphi} \Phi(V), \quad a = \frac{V^2}{g}, \quad b = \frac{V^2}{g} \operatorname{tg} \varphi.$$

En posant

$$V \operatorname{tg} \varphi + \frac{\delta(h)}{\cos \varphi} \Phi(V) = \Omega,$$

on a

$$u_0(\theta) = -\frac{\Omega}{P(\theta)}, \quad \xi_0(\theta) = \frac{V^2}{g} - \Omega \int_{\varphi}^{\theta} \frac{r(t)}{P(t)} dt,$$

$$\eta_0(\theta) = \frac{V^2}{g} \operatorname{tg} \varphi - \Omega \int_{\varphi}^{\theta} \frac{s(t)}{P(t)} dt.$$

En se limitant au premier terme de chacune des séries, on a

$$(8) \quad \Delta v = u_0(\theta) \Delta \varphi, \quad \Delta x = \xi_0(\theta) \Delta \varphi, \quad \Delta y = \eta_0(\theta) \Delta \varphi.$$

Calcul des variations des coordonnées du point d'impact. —

Il s'agit actuellement de calculer les parties principales des variations Δx , Δy du point d'impact correspondant à des variations Δh , ΔV , $\Delta \varphi$, connues, de h , V , φ .

Supposons tout d'abord que h subit une variation Δh et soient X , Y des axes parallèles aux axes x , y mais passant par l'origine de la trajectoire. Soit, de plus :

$$Y = \pi(X),$$

l'équation de la section du terrain par le plan de tir. Si h est l'altitude balistique à l'origine de la trajectoire, on devra prendre pour équation de cette courbe, par rapport aux anciens axes,

$$y = h + \pi(X).$$

Si l'on désigne par $v(\theta, h)$, $x(\theta, h)$, $y(\theta, h)$ les fonctions de θ , h définies par (1) et (2), la valeur de θ correspondant au point de chute sera donnée par

$$y(\theta, h) = h + \pi[x(\theta, h)].$$

La partie principale $\Delta \theta$ de la variation de cette valeur de θ correspondant à la variation Δh , sera donnée par

$$\Delta \theta = \frac{d\theta}{dh} \Delta h,$$

c'est-à-dire, en vertu de la relation précédente, par

$$\Delta \theta = \frac{g}{v^2(\theta)} \frac{\xi(\theta) \pi'(x) - \eta(\theta) + 1}{\pi'(x) - \operatorname{tg} \theta},$$

où $\xi(\theta)$ et $\eta(\theta)$ sont les fonctions trouvées plus haut (cas $l = h$).

On suppose naturellement $\pi'(x) - \operatorname{tg} \theta \neq 0$.

En prenant pour $\xi(\theta)$ et $\eta(\theta)$ les valeurs approchées $\alpha \xi_1(\theta)$, $1 + \alpha \eta_1(\theta)$ fournies par les équations (6) on trouve

$$\Delta x = \alpha \frac{\eta_1(\theta) - \xi_1(\theta) \operatorname{tg} \theta}{\pi'(x) - \operatorname{tg} \theta} \Delta h,$$

$$\Delta y = \Delta h + \alpha \pi'(x) \cdot \frac{\eta_1'(\theta) - \xi_1(\theta) \operatorname{tg} \theta}{\pi'(x) - \operatorname{tg} \theta} \Delta h.$$

Pour le calcul du coefficient de correction H , figurant dans la table de tir, on supposera le terrain horizontal, c'est-à-dire $\pi(x) = z = \text{constante}$.

Alors, on a

$$\Delta x = -\frac{\alpha}{\text{tg } \theta} \left[\eta_1(\theta) - \xi_1(\theta) \text{tg } \theta \right] \Delta h, \quad \Delta y = \Delta h$$

et, par suite,

$$H = -\frac{\alpha}{\text{tg } \theta} \left[\eta_1(\theta) - \xi_1(\theta) \text{tg } \theta \right].$$

Supposons maintenant que l'une des quantités V, φ varie et désignons-la par λ . Nous déterminerons la valeur θ correspondant au point de chute par la relation

$$y(\theta, \lambda) = h + \pi[x(\theta, \lambda)],$$

$v(\theta, \lambda), y(\theta, \lambda)$ et $x(\theta, \lambda)$ étant les fonctions déterminées par (1) et (2).

On trouvera, en raisonnant comme plus haut,

$$\Delta x = \frac{\eta(\theta) - \xi(\theta) \text{tg } \theta}{\pi'(x) - \text{tg } \theta} \Delta \lambda, \quad \Delta y = \pi'(x) \frac{\eta(\theta) - \xi(\theta) \text{tg } \theta}{\pi'(x) - \text{tg } \theta}$$

$\Delta x, \Delta y$ étant les parties principales des variations de x, y .

On a d'ailleurs $\Delta \lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, d'où

$$\Delta \lambda = \frac{\Delta y - \Delta x \text{tg } \theta}{\eta(\theta) - \xi(\theta) \text{tg } \theta}.$$

Si $\lambda = V$, en utilisant les formules (7), on a

$$(9) \quad \Delta V = \frac{\Delta y - \Delta x \text{tg } \theta}{W(\theta)},$$

où

$$W(\theta) = \int_{\varphi}^{\theta} \frac{s(t) - r(t) \text{tg } \theta}{P(t)} dt = \frac{1}{g} \int_{\varphi}^{\theta} \frac{v^2(t) (\text{tg } \theta - \text{tg } t)}{P(t)} dt.$$

Si $\lambda = \varphi$, en utilisant les formules (8), on a

$$(10) \quad \Delta \varphi = \frac{\Delta y - \Delta x \text{tg } \theta}{T(\theta) - \Omega W(\theta)},$$

où

$$T(\theta) = \frac{V^2}{g} (\text{tg } \varphi - \text{tg } \theta).$$

(1) Les tables de tir italiennes sont : à charge fixe lorsqu'elles donnent les éléments de tir par variations successives à l'angle de projection ; à angle fixe lorsque la bouche à feu a une inclinaison fixe (en général la plus grande permise par l'installation) et que les éléments de tir s'obtiennent en faisant varier la charge propulsive (Cfr. GUCCI, *Puntamento e tiro delle artiglierie*. Torino, 1917, p. 112). Les tables de tir à angle fixe sont d'un usage exceptionnel.

Les coefficients A et B . — Si φ est constant, on déduit, de la formule (9),

$$W(\theta) = \frac{dy}{dV} = -\operatorname{tg} \theta \cdot \frac{dx}{dV},$$

de sorte que l'on peut évaluer $W(\theta)$ si l'on dispose d'une table de tir à angle fixe (1). On a alors

$$\Delta\varphi = A \Delta x + B \Delta y,$$

où, d'une manière approchée,

$$A = \begin{cases} \frac{-\operatorname{tg} \theta}{T(\theta) - \Omega \frac{dy}{dV}}, \\ \frac{-\operatorname{tg} \theta}{T(\theta) + \Omega \frac{dx}{dV} \operatorname{tg} \theta} \end{cases} \quad B = \begin{cases} \frac{1}{T(\theta) - \Omega \frac{dy}{dV}}, \\ \frac{1}{T(\theta) + \Omega \frac{dx}{dV} \operatorname{tg} \theta} \end{cases}$$

Si, au contraire, V est fixe, on déduit de (10),

$$W(\theta) = \frac{1}{\Omega} \left[T(\theta) - \frac{dy}{d\varphi} \right] = \frac{1}{\Omega} \left[T(\theta) + \frac{dx}{d\varphi} \operatorname{tg} \theta \right],$$

et on peut calculer la valeur de cette fonction au moyen d'une table à charge fixe. On a alors

$$\Delta V = A \Delta x + B \Delta y,$$

avec, en première approximation,

$$A = \begin{cases} \frac{-\Omega \operatorname{tg} \theta}{T - \frac{dy}{d\varphi}}, \\ \frac{-\Omega \operatorname{tg} \theta}{T + \frac{dx}{d\varphi} \operatorname{tg} \theta} \end{cases} \quad B = \begin{cases} \frac{\Omega}{T - \frac{dy}{d\varphi}}, \\ \frac{\Omega}{T + \frac{dx}{d\varphi} \operatorname{tg} \theta} \end{cases}$$

On obtient ainsi les mêmes formules que M. Fubini (1).

Simptifications dans le calcul de H. — La fonction $W(\theta)$ pouvant être calculée au moyen des tables de tir, comme il a été écrit plus haut, il en résulte que l'on connaît $P(\theta)$. On a, en effet,

$$P(\theta) = \frac{v^2(\theta)}{g \frac{d}{d\theta} \left(\cos^2 \theta \frac{dW}{d\theta} \right)},$$

formule que l'on obtient en dérivant deux fois la formule définissant $W(\theta)$. On en déduit alors, pour la valeur de H ,

$$H = -\frac{\alpha}{\operatorname{tg} \theta} \int_{\varphi}^{\theta} P(t) q(t) \left[W(t) - W(\theta) \right] dt.$$

(1) FUBINI. *Su alcune formole di Balistica*. Rend. Accad. Lincei, 1917 (Cfr. le paragraphe III de notre deuxième article).

M. Picone termine son intéressant Mémoire par un tableau récapitulatif des formules à utiliser pour les calculs numériques.

VI. — CECCONI. SUR LES CORRECTIONS DU TIR FUSANT (1).

M. Cecconi s'est proposé dans cette note de rechercher les corrections à apporter à la graduation d'une fusée de shrapnell en fonction des variations des éléments initiaux. A cet effet, il reprend, sur des bases différentes de celles habituellement usitées, la détermination de la vitesse de combustion du canal fusant.

Vitesse de combustion du canal fusant. — Les causes qui influent sur la vitesse de combustion du canal fusant sont la pression atmosphérique et la longueur de la poudre du canal brûlée.

La vitesse de combustion α_y à l'altitude balistique y , est liée à la vitesse α_0 à l'altitude 0 , par la relation

$$\alpha_y = \alpha_0 + ay,$$

où a est une constante représentant la variation de vitesse par variation unitaire de y .

D'autre part, si λ est la longueur du canal consumé à l'instant t , on a

$$\frac{d\lambda}{dt} = \alpha + \beta\lambda,$$

où α est la vitesse initiale de combustion à une altitude déterminée et β une quantité que l'expérience démontre toujours être positive et très petite vis-à-vis de α . On peut donc, sans erreur appréciable, considérer β comme constant.

De la formule précédente on déduit

$$\lambda = \frac{\alpha}{\beta} (e^{\beta t} - 1).$$

Deux déterminations expérimentales λ_1, λ_2 de λ , correspondant aux temps t_1, t_2 , permettront de déterminer β . En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, on a

$$\beta = 2 \frac{\log_e \lambda_2 t_1 - \log_e \lambda_1 t_2}{t_2 - t_1},$$

β étant déterminé, on prendra, pour déterminer λ , lorsque le projectile sera arrivé à l'altitude y ,

$$\frac{d\lambda}{dt} = \alpha_0 + ay + \beta\lambda,$$

(1) A. CECCONI. *Sulle correzioni nel tiro a tempo*. Rivista di Artiglieria e genio, 1921, t. XXXVIII, pp. 182-192.

en négligeant l'influence de la rotation du projectile, de sa vitesse sur la combustion du canal fusant (dont les effets sont opposés et d'ailleurs très faibles) et, en général, toute autre cause que celle dont la formule tient compte.

γ sera supposé une fonction connue de t , c'est-à-dire que la trajectoire sera supposée connue.

De la formule ci-dessus, on déduit

$$\lambda = e^{\beta t} \left(\lambda_0 + \alpha_0 \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} + a \int_0^t \gamma e^{-\beta t} dt \right),$$

λ_0 étant la longueur consumée à la sortie du projectile de la bouche à feu.

On déterminera expérimentalement des valeurs moyennes des quantités λ_0 , α_0 et a .

Graduation de la fusée et coefficients de correction. — Dans les fusées à temps ordinaires, la graduation est proportionnelle à la longueur de la partie consumée du canal fusant. On posera donc $G = k\lambda$, $G_0 = k\lambda_0$, $m = k\alpha_0$, $n = ka$, d'où

$$(1) \quad G = e^{\beta t} \left(G_0 + m \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} + n \int_0^t \gamma e^{-\beta t} dt \right).$$

Partant de cette formule, M. Cecconi démontre qu'en négligeant β (qui est très petit), on a

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi} = A \frac{\partial G}{\partial V} + B \frac{\partial G}{\partial h} + \frac{mV}{g \cos \varphi},$$

où V , φ , h sont la vitesse initiale, l'angle de projection et l'altitude balistique à l'origine, où

$$A = - \left(V \operatorname{tg} \varphi + \frac{i \delta V}{g C \cos \varphi} \right), \quad B = \frac{V^2}{g} \cos \varphi,$$

et où, enfin, l'on suppose, dans les dérivations, l'angle d'inclinaison de la trajectoire constant.

En utilisant les principales parties de t et de γ pour des variations des éléments initiaux, on peut calculer les valeurs des dérivées partielles figurant dans la relation précédente et on a finalement

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial G}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial G}{\partial h} \Delta h.$$

Correction de la graduation sur les éléments de réglage. — La quantité m , qui dépend de la vitesse α_0 du canal fusant, est sujette à des variations suivant le lot de fusées, son âge et son

état de conservation. Les influences de ces facteurs sur G_0 et n est, d'autre part, négligeable. De la formule (1), on déduit

$$\frac{dG}{dm} = \frac{e^{\beta t} - 1}{\beta} = t + \frac{\beta}{2!} t^2 + \frac{\beta^2}{3!} t^3 + \dots$$

En se limitant au premier ordre, on déduit

$$\Delta m = \frac{\Delta G}{t}.$$

Si, par suite, avec un lot de fusées, on règle un tir fusant sur un but déterminé et si on note le temps t_1 de parcours et la correction de graduation ΔG_1 effectuée, on connaîtra la valeur du coefficient $\gamma = \frac{\Delta G_1}{t_1}$. Pour effectuer un autre tir, avec les mêmes fusées, on fera une correction $\Delta G = \gamma t$ à la graduation (en plus naturellement des corrections dépendant d'autres causes).

(A suivre.)

Lucien GODEAUX,
Lieut. de réserve du 18^e Rég^t d'Artillerie
Professeur à l'Ecole Militaire.

