EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*,

N° 6, 1932.

Remarques sur les courbes algébriques de genre cinq,

par LUCIEN GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liége.

Nous nous proposons, dans cette note, d'étudier les courbes algébriques de genre cinq, non hyperelliptiques, admettant une transformation birationnelle involutive en elle-même, dépourvue de point uni. Cette question s'est présentée dans une recherche sur les surfaces algébriques.

1. Soit C une courbe algébrique de genre cinq, non hyperelliptique, contenant une involution d'ordre deux, privée de points doubles. Le système canonique de C étant simple, nous pouvons supposer que C est une courbe canonique, appartenant à un espace S_4, à quatre dimensions. L'involution en question est nécessairement déterminée sur cette courbe par l'homographie harmonique

$$\frac{x_0'}{x_0}=\frac{x_1'}{x_1}=\frac{x_2'}{x_2}=\frac{x_3'}{-x_3}=\frac{x_4'}{-x_4}. \tag{H}$$

On sait que la courbe C, d'ordre huit, est la base d'un réseau d'hyperquadriques $|Q|$ de S_4. Le réseau $|Q|$ doit être transformé en lui-même par H et dans ce réseau, H détermine l'identité ou une homologie harmonique.

Par hypothèse, la courbe C ne peut rencontrer les axes de l'homographie H. Par suite, il ne peut passer par C une hyperquadrique Q, transformée en elle-même par H, contenant les axes de H. Il en résulte que H détermine l'identité dans le réseau |Q| et que la courbe C est représentée par les équations de la forme

$$\left.\begin{aligned} a_0x_3^2 + a_1x_3x_4 + a_2x_4^2 + \varphi_1(x_0, x_1, x_2) = 0, \\ b_0x_3^2 + b_1x_3x_4 + b_2x_4^2 + \varphi_2(x_0, x_1, x_2) = 0, \\ c_0x_3^2 + c_1x_3x_4 + c_2x_4^2 + \varphi_3(x_0, x_1, x_2) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

φ_1, φ_2, φ_3 étant des polynômes homogènes du second degré en x_0, x_1, x_2.

2. Les hyperquadriques de |Q| coupent l'axe

$$x_0 = x_1 = x_2 = 0 \quad (2)$$

de l'homographie H suivant des couples de points nécessairement variables qui peuvent être en nombre ∞^2 ou ∞^1.

Dans le premier cas, le déterminant

$$| a \quad b \quad c | \quad (3)$$

n'est pas nul et les équations (1) peuvent se mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} x_3^2 + \varphi_1(x_{01}, x_1, x_2) = 0, \\ x_3x_4 + \varphi_2(x_{01}, x_1, x_2) = 0, \\ x_4^2 + \varphi_3(x_{01}, x_1, x_2) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

φ_1, φ_2, φ_3 ayant la même signification que les équations (1), mais n'étant pas nécessairement les mêmes polynômes.

Dans le second cas, le déterminant (3) est nul; les quadriques Q découpent, sur la droite (2), les couples d'une involution. Une des quadriques Q contient la droite (2) et en prenant pour sommets de la figure de référence les points doubles de l'involution déterminée sur la droite (2), les équations de la courbe C peuvent se mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} x_3^2 + \varphi_1(x_0, x_1, x_2) = 0, \\ x_4^2 + \varphi_2(x_0, x_1, x_2) = 0, \\ \varphi_3(x_0, x_1, x_2) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II})$$

les φ étant des polynômes homogènes du second degré.

3. L'involution I déterminée sur C par l'homographie H, étant dépourvue de points doubles, est de genre trois.

Supposons que la courbe C soit représentée par les équations (I) et projetons-la du point (0, 0, 0, 0, 1) sur l'hyperplan $x_4 = 0$. Nous obtenons une courbe C′ d'équations

$$x_3^2 + \varphi_1(x_0, x_1, x_2) = 0,$$
$$x_3^2\varphi_3 + \varphi_2^2 = 0.$$

La première de ces équations représente une quadrique; la seconde représente une surface du quatrième ordre passant doublement par la conique

$$x_3 = 0, \qquad \varphi_2 = 0.$$

La courbe C′, d'ordre huit, a quatre points doubles sur cette conique; elle est transformée en elle-même par l'homologie

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_0 : x_1 : x_2 : -x_3.$$

En projetant la courbe C′ du point (0, 0, 0, 1) sur le plan $x_3 = 0$, on obtient un courbe du quatrième ordre, d'équation

$$\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3 = 0, \tag{4}$$

qui représente l'involution I. La courbe (4) est d'ailleurs la plus générale de son ordre, les polynômes φ n'étant astreints à aucune condition. Il en résulte que la courbe (4) ne possède aucune transformation birationnelle en elle-même; par suite la courbe C ne possède, en général, pas d'autre transformation birationnelle en elle-même que l'homographie H.

Observons que la courbe C′ peut être représentée par les équations

$$\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3 = 0, \qquad x_3^2 + \varphi_1 = 0.$$

La conique $\varphi_1 = 0$ touche la quadrique (4) en quatre points, qui sont des points de diramation apparente.

4. Supposons maintenant que la courbe C soit représentée par les équations (II). Elle est transformée en elle-même par les deux homologies harmoniques

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_0 : x_1 : x_2 : -x_3 : x_4, \tag{H′}$$
$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : -x_4. \tag{H″}$$

Chacune de ces homologies détermine, sur C, une involution d'ordre deux, que nous représenterons respectivement par I′, I″, possédant huit points doubles et par conséquent elliptiques. Les homographies H, H', H'' sont deux-à-deux permutables et forment un groupe trirectangle. Les groupes de quatre points de C homologues dans ces trois homographies sont représentés par les points de la conique

$$x_3 = x_4 = 0, \qquad \varphi_3 = 0.$$

Cette conique représente trois involutions appartenant à la courbe de genre trois représentant l'involution I et aux courbes elliptiques représentant les involutions I', I''. Les groupes de diramation sont déterminés sur la conique respectivement par les courbes $\varphi_1 \varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$.

En résumé, *les courbes algébriques de genre cinq, non hyperelliptiques, possédant une involution d'ordre deux privée de points doubles et donc de genre trois, sont de deux espèces. Les courbes de première espèce (cas général) ne possèdent en général pas d'autre involution; les courbes de seconde espéce possèdent deux involutions elliptiques d'ordre deux, permutables entre elles et avec l'involution donnée.*

Liége, le 11 juin 1932.

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles