LA

GÉOMÉTRIE DE LA CUBIQUE GAUCHE

Notre but, dans ce travail, est de donner une interprétation hyperspatiale de la géométrie de la cubique gauche, c'est-à-dire de la géométrie constituée en prenant pour éléments les ∞^{12} cubiques gauches d'un espace linéaire à trois dimensions, et pour groupe fondamental, au sens de Klein, le groupe des homographies de cet espace.

Une seule tentative analogue a été faite antérieurement, à notre connaissance. Spottiswoode (*), en considérant une cubique gauche comme la courbe commune à quatre cônes du troisième ordre, projetant la courbe des quatre sommets d'un tétraèdre, a introduit quarante-huit nombres qu'il appelle coordonnées de la cubique gauche.

Dans ce travail, nous partons du fait qu'une cubique gauche appartient à ∞^2 quadriques formant un réseau, et nous sommes ainsi conduit à représenter une cubique gauche par un plan touchant, le long d'une conique, une hypersurface du quatrième ordre d'un espace linéaire à neuf dimensions.

Nous aurons à utiliser des propriétés de la géométrie projective hyperspatiale, et notamment la théorie des

(*) *On the 48-coordinates of a cubic curve in space.* (Proc. of the royal Society of London, 1881, vol. XXXI, pp. 301-302.)

surfaces de Véronèse. Nous renvoyons, une fois pour toutes, pour ces propriétés, à l'ouvrage bien connu de M. Bertini (*).

1. — Représentation des quadriques par les points d'un espace a neuf dimensions. — Considérons les quadriques d'un espace linéaire à trois dimensions Σ comme les points d'un espace linéaire à neuf dimensions S_9. Si nous désignons par x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées projectives homogènes d'un point de Σ, l'équation d'une quadrique de cet espace peut s'écrire

$$\sum X_{ik} x_i x_k = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

où l'on pose

$$X_{ik} = X_{ki}.$$

Nous prendrons les dix quantités

$$X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{44}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}, X_{34}$$

comme coordonnées projectives homogènes du point de l'espace S_9 qui représente la quadrique (1).

Si nous représentons par

$$a_x^2 \equiv a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \cdots + 2 a_{34} x_3 x_4 = 0,$$
$$b_x^2 = 0, \ldots, c_x^2 = 0,$$

r quadriques linéairement indépendantes de Σ, aux quadriques du système linéaire ∞^{r-1}

$$\lambda_1 a_x^2 + \lambda_2 b_x^2 + \cdots + \lambda_r c_x^2 = 0,$$

correspondent, dans l'espace S_9, les points dont les coordonnées sont données par

$$\rho X_{ik} = \lambda_1 a_{ik} + \lambda_2 b_{ik} + \cdots + \lambda_r c_{ik}, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

ρ étant un facteur de proportionnalité.

(*) *Geometria proiettiva degli iperspazi.* (Pisa, 1906.)

Le lieu de ces points, lorsque les λ varient, est un espace linéaire S_{r-1}, à r-1 dimensions.

En particulier, les quadriques d'un faisceau de Σ sont représentées par les points d'une droite S_1 de S_9; les quadriques d'un réseau, par les points d'un plan S_2; les quadriques d'un système linéaire ∞^8, par les points d'un hyperplan S_8.

Il est clair qu'il existe une projectivité entre les ∞^9 systèmes linéaires ∞^8 de quadriques de Σ et les ∞^9 hyperplans S_8 de l'espace S_9.

2. — Hypersurface représentant l'ensemble des quadriques coniques de Σ. — La condition nécessaire et suffisante pour que la quadrique (1) soit un cône est que le déterminant

$$\Delta(X) \equiv \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{12} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} & X_{34} \\ X_{14} & X_{24} & X_{34} & X_{44} \end{vmatrix}$$

soit nul. Les points de l'espace S_9, qui représentent des quadriques coniques de Σ, forment donc une hypersurface algébrique irréductible, du quatrième ordre, d'équation

$$\Delta(X) = 0.$$

Nous désignerons cette hypersurface par la notation V_8^4.

Observons qu'un faisceau de quadriques de Σ contient en général quatre cônes; la droite S_1 de l'espace S_9 correspondant à ce faisceau rencontre l'hypersurface V_8^4 en général en quatre points.

3. — Variété des couples de plans de Σ. — La condition nécessaire et suffisante pour que la quadrique (1) soit dégénérée en deux plans s'exprime en égalant à zéro tous les mineurs du déterminant Δ (X), ce qui donne, à cause de la symétrie de ce déterminant, trois relations indépendantes entre les X_{ik}. Les points de l'espace S_9 qui représentent les quadriques de Σ dégénérées en deux plans forment donc une variété algébrique V_6, à six dimensions. D'ailleurs, les plans de Σ étant en nombre ∞^3, les couples de plans de Σ sont en nombre ∞^6 et forment une variété irréductible. La variété V_6 est donc irréductible.

On sait qu'un système linéaire de quadriques, ∞^3 contient en général dix quadriques décomposées en deux plans (et d'une manière précise, il en contient au plus dix). Il en résulte que la variété V_6 est rencontrée par un espace linéaire S_3 à trois dimensions, de S_9, en général en dix points et, précisément, en dix points en plus. La variété V_6 est donc d'ordre dix; nous la représenterons par V_6^{10}.

Observons que si un faisceau de quadriques non toutes coniques contient une quadrique formée de deux plans distincts, elle contient encore au plus deux quadriques coniques. Par suite, si une droite de S_9, n'appartenant pas à l'hypersurface V_8^4, rencontre en un point la variété V_6^{10}, elle ne rencontre plus l'hypersurface V_8^4 qu'en deux points au plus. Il en résulte que la variété V_6^{10} est double pour l'hypersurface V_8^4.

4. — Variété des couples de plans confondus de Σ. — Les quadriques de Σ formées de deux plans confondus sont en nombre ∞^3 et les points de S_9 qui les représentent forment une variété V_3 à trois dimensions. La condition nécessaire et suffisante pour que la quadrique (1) soit formée de deux plans confondus est que le déterminant Δ (X) soit de caractéristique un, c'est-à-dire que tous les déterminants que l'on en déduit, en effaçant deux lignes et deux colonnes, soient nuls. On obtient ainsi les équations de la variété V_3, qui est donc algébrique.

Désignons par ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 les coordonnées projectives tangentielles homogènes de l'espace Σ. Une quadrique formée de deux plans confondus a une équation de la forme

$$(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4)^2 = 0.$$

Les équations paramétriques de la variété V_3 sont, par suite,

$$\frac{X_{11}}{\xi_1^2} = \frac{X_{22}}{\xi_2^2} = \frac{X_{33}}{\xi_3^2} = \frac{X_{44}}{\xi_4^2} = \frac{X_{12}}{\xi_1 \xi_2} = \frac{X_{13}}{\xi_1 \xi_3} = \dots = \frac{X_{34}}{\xi_3 \xi_4}.$$

Cela étant, considérons trois hyperplans de S_9

$$\sum A_{ik} X_{ik} = 0, \quad \sum B_{ik} X_{ik} = 0, \quad \sum C_{ik} X_{ik} = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$
$$A_{ik} = A_{ki}, \quad B_{ik} = B_{ki}, \quad C_{ik} = C_{ki},$$

n'ayant pas en commun un espace S_7. Ces hyperplans ont en commun un espace linéaire S_6 et le nombre des points d'intersection de V_3 avec cet espace est égal à l'ordre de cette variété. L'ordre de V_3 est donc égal au nombre des systèmes de valeurs des ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 satisfaisant aux équations

$$\sum A_{ik} \xi_i \xi_k = 0, \quad \sum B_{ik} \xi_i \xi_k = 0, \quad \sum C_{ik} \xi_i \xi_k = 0.$$

Ces équations représentent, dans l'espace Σ, trois quadriques-enveloppes n'appartenant pas à un même faisceau tangentiel. Ces quadriques-enveloppes ont en général huit plans communs; par suite, la variété V_3 est du huitième ordre; nous la représenterons par la notation V_3^8.

Un faisceau de quadriques non toutes coniques, contenant une quadrique formée de deux plans confondus, ne contient plus qu'un cône. Par suite, une droite n'appartenant pas à V_8^4 et rencontrant V_3^8 en un point ne rencontre plus V_8^4 qu'en un point; il en résulte que la variété V_3^8 est triple pour l'hypersurface V_8^4.

Nous allons maintenant rechercher quelle est la multiplicité de la variété V_3^8 pour la variété V_6^{10}. A cet effet, considérons le système linéaire ∞^3 de quadriques

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 a_x^2 + \lambda_3 b_x^2 + \lambda_4 c_x^2 = 0,$$

que nous supposerons dépourvu de point-base et ne contenant qu'une seule quadrique formée de deux plans confondus. Nous chercherons le nombre des quadriques de ce système formées de deux plans distincts. Formons le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 a_{11} + \lambda_3 b_{11} + \lambda_4 c_{11} & \lambda_2 a_{12} + \lambda_3 b_{12} + \lambda_4 c_{12} & - & \lambda_2 a_{14} + \lambda_3 b_{14} + \lambda_4 c_{14} \\ \lambda_2 a_{12} + \lambda_3 b_{12} + \lambda_4 c_{12} & - & - & - \\ - & - & - & - \\ \lambda_2 a_{14} + \lambda_3 b_{14} + \lambda_4 c_{14} & - & - & \lambda_2 a_{44} + \lambda_3 b_{44} + \lambda_4 c_{44} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

et interprétons les λ comme coordonnées projectives homogènes d'un espace linéaire à trois dimensions. Les équations obtenues en égalant à zéro les mineurs relatifs aux éléments de la première ligne représentent six droites passant par le point O ($\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$). Le déterminant obtenu en supprimant la quatrième ligne et la quatrième colonne, égalé à zéro, représente une surface cubique ayant un point double en O et rencontrant les six droites trouvées plus haut en six points en dehors de O. Les coordonnées de ces six points annulent tous les mineurs du déterminant (1); par suite, le système linéaire envisagé contient six quadriques formées de deux plans distincts. Il en résulte qu'un espace S_3, linéaire, de S_9, rencontrant V_3^8 en un point, ne rencontre plus V_6^{10} qu'en six points; la variété V_3^8 est donc quadruple pour la variété V_6^{10}.

5. — En résumé : *Si l'on représente les quadriques d'un espace à trois dimensions* Σ *par les points d'un espace linéaire à neuf dimensions* S_9 :

1° *L'ensemble des quadriques coniques de* Σ *est représenté par une hypersurface algébrique irréductible* V_8^4, *de dimension huit et d'ordre quatre;*

2° *L'ensemble des quadriques formées de deux plans est représenté par une variété algébrique irréductible* V_6^{10}, *de dimension six et d'ordre dix, double pour la variété* V_8^4;

3° *L'ensemble des quadriques formées de deux plans confondus est représenté par une variété algébrique irréductible* V_3^8, *de dimension trois et d'ordre huit, triple pour l'hypersurface* V_8^4 *et quadruple pour la variété* V_6^{10}.

6. — Remarque. — Considérons un hyperplan de S_9,

$$\sum A_{ik} X_{ik} = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$
$$A_{ik} = A_{ki}.$$

Au moyen de la représentation paramétrique de la variété V_3^8, il lui correspond une quadrique-enveloppe de Σ,

$$\sum A_{ik} \xi_i \xi_k = 0. \tag{1}$$

Il existe donc une projectivité entre les quadriques-enveloppes de Σ et les hyperplans de S_9.

La condition pour que le point de S_9 représentant la quadrique

$$a_x^2 = 0, \tag{2}$$

de Σ, appartienne à l'hyperplan considéré, est que

$$\sum A_{ik} a_{ik} = 0.$$

Les quadriques (1) et (2) sont dites conjuguées. On obtient ainsi la généralisation d'une propriété bien connue des surfaces de Véronèse (cfr. Bertini, *loc. cit.*, chap. XV).

7. — Espaces linéaires appartenant a l'hypersurface V_8^4. — La détermination des espaces linéaires appartenant à l'hypersurface V_8^4 revient à celle des systèmes linéaires de cônes de Σ. On sait qu'il existe deux espèces de faisceaux de cônes quadratiques :

1° Faisceau formé par les cônes ayant même sommet et quatre génératrices (distinctes ou confondues) en commun;

2° Faisceau formé par les cônes projetant une conique des points d'une droite rencontrant la conique, mais non située dans le plan de celle-ci. Ces cônes ont même plan tangent le long de leur génératrice commune.

Deux cônes quelconques d'un système linéaire doivent déterminer un faisceau de cônes dont tous les éléments appartiennent au système. Il en résulte qu'il existe deux espèces de systèmes linéaires complets de cônes du second ordre :

1° Système linéaire ∞^5 de cônes ayant même sommet;

2° Système linéaire ∞^4 de cônes ayant une génératrice commune et même plan tangent le long de cette génératrice.

Il y aura donc deux familles d'espaces linéaires sur l'hypersurface V_8^4. Une de ces familles est composée d'espaces linéaires à cinq dimensions, que nous désignerons par σ_5; l'autre est formée d'espaces linéaires à quatre dimensions, que nous désignerons par σ_4.

8. — Les espaces linéaires a cinq dimensions σ_5 de l'hypersurface V_8^4. — Considérons le système linéaire ∞^5 formé par les cônes quadratiques de sommet P, dans Σ, et soit σ_5 l'espace linéaire correspondant dans l'hypersurface V_8^4.

Parmi les cônes de sommet P se trouvent ∞^4 cônes formés de deux plans passant par P et ∞^2 cônes formés de deux plans confondus, passant par P. Par conséquent, l'espace σ_5 rencontre la variété V_6^{10} suivant une variété à quatre dimensions et la variété V_3^8 suivant une surface.

Entre les cônes de sommet P et les points de σ_5 existe une projectivité faisant correspondre à un système linéaire ∞^r $(r \leq 5)$ de cônes de sommet P un espace linéaire S_r, à r dimensions, de σ_5. Il en résulte qu'aux cônes formés de deux plans confondus passant par P correspondent des points de la variété V_3^8 formant une surface de Véronèse F_2^4 (du quatrième ordre). Aux couples de plans passant par P correspondent des points de la variété V_6^{10} formant une variété W_4^3, à quatre dimensions et d'ordre trois, lieu des plans tangents à la surface de Véronèse F_2^4.

Un cône de Σ ne peut appartenir qu'à un seul système linéaire de cônes de même sommet; donc par un point de V_4^8, n'appartenant pas à V_6^{10}, passe un seul espace tel que σ_5.

Deux plans distincts peuvent former des cônes dégénérés dans ∞^1 systèmes linéaires de cônes de même sommet; donc par un point de V_6^{10}, n'appartenant pas à V_3^8, passent ∞^1 espaces σ_5.

On voit de même que par un point de V_3^8 passent ∞^2 espaces σ_5.

Les espaces σ_5 sont, comme les points de l'espace Σ, en nombre ∞^3.

L'hypersurface V_8^4 *est le lieu de* ∞^3 *espaces linéaires à cinq dimensions,* σ_5, *découpant sur la variété* V_3^8 *des surfaces de Véronèse* F_2^4 *et sur la variété* V_6^{10}, *des variétés* W_4^3 *à quatre dimensions et d'ordre trois. Par un point de l'hypersurface* V_8^4 (*n'appartenant pas à* V_6^{10}) *passe un* *espace σ_5 ; par un point de V_6^{10} (n'appartenant pas à V_3^8) passent ∞^1 espaces σ_5 ; par un point de V_3^8 passent ∞^2 espaces σ_5.*

9. — Espaces tangents a la variété V_3^8. — Soient M un point de la variété V_3^8, N un point de la variété V_6^{10} (n'appartenant pas à V_3^8). Au point M correspond dans Σ un plan compté deux fois, et au point N, un couple de plans. Par un choix convenable du tétraèdre de référence dans Σ, on peut toujours supposer que ces quadriques dégénérées ont respectivement pour équations

$$x_1^2 = 0, \quad x_2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4) = 0.$$

Les quadriques correspondant aux points de la droite MN auront pour équations

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4) = 0. \tag{1}$$

Formons le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2\lambda_1 & a_1\lambda_2 & 0 & 0 \\ a_1\lambda_2 & 2a_2\lambda_2 & a_3\lambda_2 & a_4\lambda_2 \\ 0 & a_3\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_4\lambda_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Ce déterminant est toujours nul, quels que soient λ_1, λ_2, et, d'une manière plus précise, il est de caractéristique trois pour $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Toutes les quadriques (1) sont donc des cônes et la droite MN appartient tout entière à l'hypersurface V_8^4.

La condition nécessaire et suffisante pour que toutes les quadriques (1) soient dégénérées, c'est-à-dire pour que le déterminant (2) ait au plus la caractéristique deux, est que l'ont ait $a_3 = a_4 = 0$. Dans ce cas, le faisceau (1) contient deux quadriques formées de deux plans confondus :

$$x_1^2 = 0, \quad (a_1 x_1 + 2 a_2 x_2)^2 = 0.$$

La droite MN, qui appartient actuellement tout entière à V_6^{10}, rencontre V_3^8 en un second point M'.

La condition nécessaire et suffisante pour que le point M' se confonde avec M est que l'on ait $a_2 = 0$. Dans ce cas, les quadriques qui correspondent dans Σ aux points de la droite MN sont formées d'un plan fixe et d'un plan variable dans un faisceau.

Le lieu de la droite MN satisfaisant aux conditions précédentes, lorsque N varie dans V_6^{10}, est formé des points qui correspondent aux quadriques de Σ formées d'un plan fixe et d'un plan variable. Ces quadriques forment un système linéaire ∞^3 et, par suite, le lieu considéré est un espace linéaire S_3, à trois dimensions, appartenant tout entier à V_6^{10} et n'ayant que le seul point M en commun avec V_3^8. Nous désignerons cet espace par σ_3.

Considérons maintenant un point M_1 de V_3^8, distinct de M, et soit

$$(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4)^2 = 0$$

la quadrique qui lui correspond dans Σ. Toutes les quadriques du faisceau

$$\mu_1 x_1^2 + \mu_2 (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4)^2 = 0$$

sont dégénérées en deux plans en général distincts ; par suite, la droite MM_1 appartient tout entière à V_6^{10} et rentre dans la catégorie des droites telles que MN, envisagées plus haut. Il en résulte que l'espace σ_3 est le lieu des cordes de V_3^8 dont les points d'appui sur cette variété sont confondus en M, c'est-à-dire le lieu des tangentes à

V_3^8 en M. L'espace σ_3 est donc l'espace tangent à V_3^8 en M. Par suite,

La variété V_6^{10} *est le lieu des* ∞^3 *espaces linéaires à trois dimensions,* σ_3, *tangents à la variété* V_3^8.

10. — *Les espaces linéaires à quatre dimensions* σ_4 *de l'hypersurface* V_8^4. — Soient a une droite, α un plan passant par a dans Σ. Considérons, dans cet espace, le système linéaire ∞^4 de cônes quadratiques tangents à α le long de a, et soit σ_4 l'espace linéaire correspondant dans l'hypersurface V_8^4.

Les cônes dégénérés appartenant au système linéaire considéré forment deux variétés : l'une est constituée par les cônes formés du plan fixe α et d'un plan quelconque de l'espace. Si nous désignons par M le point de la variété V_8^3 correspondant au cône formé du plan α compté deux fois, aux cônes dégénérés formant cette première variété correspondent, dans S_9, les points de l'espace σ_3, tangent en M à la variété V_3^8.

La seconde variété de cônes dégénérés est formée des couples de plans passant par la droite a. Ces couples de plans sont en nombre ∞^2 et forment un réseau de quadriques dégénérées; il leur correspond donc dans l'espace S_9 les points d'un plan que nous désignerons par σ_2. Parmi les couples de plans passant par a se trouvent ∞^1 couples de plans confondus; par suite, le plan σ_2 rencontre la variété V_3^8 suivant une courbe.

Dans un système linéaire ∞^8 de quadriques de Σ, dépourvu de point-base, se trouvent deux quadriques formées de deux plans confondus passant par une droite donnée; par suite, un hyperplan de S_9 rencontre en deux points la courbe commune à σ_2 et à V_3^8. Cette courbe est donc une conique, que nous désignerons par Γ_1^2. La conique Γ_1^2 passe évidemment par M.

L'espace σ_3 et le plan σ_2 ont en commun une seule droite (passant par M) qui représente le faisceau de quadriques formées du plan α et d'un plan variable passant par a. Par suite, σ_3 et σ_2 déterminent complètement l'espace σ_4.

Les systèmes formés dans Σ par une droite et par un plan passant par cette droite sont en nombre ∞^5; par suite, les espaces σ_4 de l'hypersurface V_8^4 sont en nombre ∞^5 également. Par un point de V_8^4 passent ∞^1 de ces espaces, car un cône de Σ appartient à ∞^1 systèmes linéaires ∞^4 de cônes du type envisagé ici (chacun de ces ∞^1 systèmes est déterminé par une génératice du cône et par le plan tangent à celui-ci le long de cette génératrice).

Il est aisé de voir que par un espace σ_3 tangent à V_3^8 passent ∞^2 espaces σ_4, mais que par un plan σ_2 il n'en passe que ∞^1.

L'hypersurface V_8^4 est le lieu de ∞^5 espaces linéaires à quatre dimensions σ_4, découpant des coniques sur la variété V_3^8. Par un point de l'hypersurface V_8^4 (n'appartenant pas à la variété V_6^{10}) passent ∞^1 espaces σ_4. Un espace σ_3 tangent à la variété V_3^8 appartient à ∞^2 espaces σ_4; le plan σ_2 d'une conique de V_3^8 appartient à ∞^1 espaces σ_4.

11. — Le système des surfaces de Véronèse appartenant a la variété V_3^8. — Il résulte de ce qui a été établi plus haut que :

1° A chaque point A de l'espace Σ correspond sur la variété V_3^8 une surface de Véronèse F_2^4, lieu des points représentant dans S_9 les quadriques formées de deux plans confondus passant par A ;

2° A chaque droite a de l'espace Σ correspond sur la variété V_3^8 une conique Γ_1^2, lieu des points de S_9 représentant les quadriques formées de deux plans confondus passant par a.

On a donc, sur V_3^8, ∞^3 surfaces de Véronèse F_2^4 et ∞^4 coniques Γ_1^2. Il est clair que si la droite a passe par le point A, la conique Γ_1^2 correspondant à a appartient à la surface de Véronèse F_2^4 qui correspond au point A.

Considérons trois points M, M', M'' de V_3^8 et supposons que les plans qui leur correspondent dans Σ aient en commun un unique point A. Il y aura une seule surface de Véronèse, celle qui correspond au point A, passant par les points M, M', M''. Les ∞^3 surfaces de Véronèse situées sur V_3^8 forment donc un système linéaire que nous désignerons par $|F_2^4|$.

Deux points distincts de Σ déterminant une droite, deux surfaces du système $|F_2^4|$ ont en commun une conique Γ_1^2 et cette conique est l'intersection complète de ces surfaces. On voit de même que trois surfaces du système $|F_2^4|$, n'appartenant pas à un même faisceau, c'est-à-dire n'ayant pas en commun une même conique Γ_1^2, ne se rencontrent qu'en un point. Le système $|F_2^4|$ est donc homaloïdal et, par suite, complet. On voit de plus qu'il existe une projectivité entre le système $|F_2^4|$ et l'espace ponctuel Σ.

Il existe sur la variété V_3^8 *un système linéaire complet homaloïdal,* ∞^3, $|F_2^4|$, *de surfaces de Véronèse. Deux surfaces de ce système ont en commun une conique. Le système* $|F_2^4|$ *et l'espace ponctuel* Σ *sont projectifs.*

12. — Hyperplan tangent a l'hypersurface V_8^4 le long d'un espace σ_5. — Considérons les surfaces de Véronèse F_2^4, F'^4_2 de V_3^8, correspondant respectivement aux points A, A' de Σ. Chacune de ces surfaces détermine un espace à cinq dimensions, linéaire, appartenant à l'hypersurface V_8^4; soient respectivement σ_5, σ'_5 ces espaces.

Les surfaces F_2^4, $F_2'^4$ ont en commun une conique Γ_1^2; par suite, les espaces σ_5, σ_5' ont en commun au moins le plan σ_2 de cette conique. Les espaces σ_5, σ_5' appartiennent donc à un hyperplan S_8 au moins. D'autre part, un hyperplan rencontre la variété V_3^8 suivant une surface du huitième ordre; en particulier, un hyperplan passant par σ_5, σ_5' rencontre V_3^8 suivant une surface formée de F_2^4, $F_2'^4$. Il en résulte que les espaces σ_5, σ_5' ne peuvent appartenir qu'à un seul hyperplan et n'ont donc en commun que le plan σ_2 de la conique commune à F_2^4, $F_2'^4$.

Les hyperplans de S_9 passant par σ_5 découpent donc, sur V_3^8, en dehors de F_2^4, des surfaces de Véronèse appartenant au système $|F_2^4|$, puisque ce système est complet. D'autre part, ce système est irréductible et les hyperplans passant par σ_5 sont en nombre ∞^3 comme les surfaces du système envisagé. Par suite, toutes les surfaces du système $|F_2^4|$ sont découpées par les hyperplans contenant une de ces surfaces.

Reprenons les surfaces F_2^4, $F_2'^4$. Aux points de l'hyperplan contenant les espaces σ_5, σ_5' déterminés par ces surfaces correspondent dans Σ les quadriques d'un système linéaire ∞^8 contenant tous les cônes de sommets A et A'. Ce système est par conséquent dépourvu de point-base. Faisons tendre A' vers A d'une manière continue; l'espace σ_5' tend vers σ_5 et la surface $F_2'^4$ vers F_2^4. A la limite, le système linéaire ∞^8 de quadriques considéré sera le système formé par les quadriques passant par le point A et l'hyperplan correspondant rencontrera la variété V_3^8 suivant la seule surface F_2^4. Nous désignerons cet hyperplan par σ_8. Observons que si M est un point de la surface F_2^4, l'hyperplan σ_8 contiendra l'espace σ_3 tangent à V_3^8 en M, car si α est le plan de Σ correspondant à M, α passe par A et forme donc, avec un plan quelconque, une quadrique passant par A. L'hyperplan σ_8 est donc le lieu des espaces σ_3 tangents à V_3^8 aux points de la surface de Véronèse F_2^4.

On sait que dans un faisceau de quadriques déterminé par un cône et par une quadrique passant par le sommet de ce cône il n'existe plus que deux cônes (en dehors du cône donné). Par suite, une droite passant par un point P de l'hypersurface V_8^4, appartenant à l'espace σ_5 (mais extérieur à V_6^{10}), est tangente en P à cette hypersurface, si elle appartient à l'hyperplan σ_8. Réciproquement, si une droite est tangente en un point P à l'hypersurface V_8^4, elle appartient à l'hyperplan σ_8. Cet hyperplan est donc tangent à l'hypersurface V_8^4 le long de l'espace σ_5.

Aux quadriques de Σ *passant par un point correspondent dans l'espace* S_9 *les points d'un hyperplan* σ_8 *tangent à l'hypersurface* V_8^4 *le long de l'espace* σ_5 *correspondant à ce point. L'hyperplan* σ_8 *rencontre la variété* V_3^8 *suivant une seule surface de Véronèse* F_2^4 *et contient tous les espaces* σ_3 *tangents à cette variété aux points de cette surface.*

13. — Remarque. — Le fait qu'un hyperplan de S_9 contenant une surface de Véronèse de la variété V_3^8 rencontre encore cette variété suivant une seconde surface de Véronèse se traduit, dans l'espace Σ, par la propriété suivante : Si un système linéaire de quadriques, ∞^8, dépourvu de point-base, contient tous les cônes ayant pour sommet un point A, il contient également tous les cônes ayant pour sommet un second point A'. Bien que cela ne soit pas nécessaire pour la suite, nous allons indiquer la liaison entre les points A et A'.

Considérons un système linéaire H de quadriques, ∞^8, sans point-base, contenant tous les cônes ayant pour sommet un point A. Ce système H peut être complètement déterminé par six cônes linéairement indépendants, de sommet A, et par un réseau $|Q|$ de quadriques dont A ne soit pas un point-base. En général, H contient ∞^4 cônes ayant pour sommet un point déterminé. Supposons qu'il puisse exister un point A′ tel que tous les cônes de sommet A′ appartiennent au système H. Dans ces conditions, un cône de sommet A et un cône de sommet A′ déterminent un faisceau de quadriques du système H et les points A, A′ sont conjugués par rapport à toutes les quadriques de ce faisceau. Considérons le système linéaire H_0 de quadriques, ∞^6, déterminé par le système des cônes de sommet A et par une quadrique Q_0 du réseau $|Q|$. Il existe en général ∞^2 quadriques de H_0 qui sont des cônes ayant leur sommet en un point déterminé A′; ces cônes sont d'ailleurs tous dégénérés en des couples de plans passant par la droite AA′. D'après nos hypothèses, le système H_0 doit contenir ∞^3 cônes de sommet A′; on pourra, par suite, trouver un cône de sommet A′, soit R′, non formé par deux plans passant par la droite AA′. Le faisceau déterminé par R′ et Q_0 contient nécessairement un cône de sommet A et, par suite, A et A′ sont conjugués par rapport à Q_0. En faisant décrire à Q_0 le réseau $|Q|$, on voit que les points A, A′ sont conjugués par rapport à toutes les quadriques du réseau $|Q|$ et, par suite, par rapport à toutes les quadriques du système H.

Observons que si le système H a A comme point-base, c'est-à-dire si A est un point-base du système $|Q|$, le même raisonnement prouve que A′ coïncide avec A.

14. — Espace σ_6 tangent a la variété V_3^8 le long d'une conique. — Les quadriques de Σ passant par une droite a forment un système linéaire ∞^6 et sont donc représentées, dans S_9, par les points d'un espace linéaire à six dimensions que nous représenterons par σ_6.

Les plans passant par a, comptés deux fois, forment des quadriques du système envisagé ; par suite, l'espace σ_6 contient la conique Γ_1^2 de la variété V_3^8, dont les points représentent ces plans.

Les quadriques formées d'un plan passant par a et d'un plan quelconque appartiennent au système linéaire envisagé ; par suite, σ_6 est le lieu des espaces σ_3 tangents à la variété V_3^8 aux points de la conique Γ_1^2. Nous disons que σ_6 est l'espace à six dimensions tangent, le long de Γ_1^2, à la variété V_3^8. Observons que si M, M' sont deux points de la conique Γ_1^2, σ_3, σ_3' les espaces tangents à V_3^8 en ces points, ces espaces n'ont qu'un point en commun et déterminent, par suite, l'espace σ_6.

Le système de quadriques passant par a contient ∞^1 systèmes linéaires de cônes touchant un plan le long de a ; par suite, l'espace σ_6 contient ∞^1 espaces σ_4 appartenant à l'hypersurface V_8^4.

Aux quadriques de l'espace Σ *passant par une droite correspondent, dans l'espace* S_9, *les points d'un espace linéaire* σ_6 *à six dimensions, tangent à la variété* V_3^8 *le long d'une conique et contenant les espaces* σ_3 *tangents à cette variété aux points de cette conique. L'espace* σ_6 *contient* ∞^1 *des espaces* σ_4 *appartenant à l'hypersurface* V_8^4.

Les espaces σ_6 sont en nombre ∞^4. On voit, de plus, aisément que par un point d'un espace σ_6 passent deux des espaces σ_4 lui appartenant.

15. — Représentation de la cubique gauche. — Considérons, dans Σ, un faisceau de quadriques ne contenant aucune surface dégénérée. Ce faisceau contient quatre cônes. Si deux de ces cônes coïncident en un seul, le sommet de ce dernier appartient à toutes les quadriques du faisceau et ces quadriques ont même plan tangent en ce point. La droite qui correspond dans S_9 à ce faisceau est tangente à l'hypersurface V_8^4. Si les deux autres cônes du faisceau coïncident également en un seul, le faisceau est formé de quadriques ayant même plan tangent en deux points et, puisque le faisceau ne contient pas de quadrique dégénérée, la courbe-base du faisceau est constituée par une cubique gauche passant par les points de contact des quadriques et par la droite joignant ces deux points. La droite de S_9 qui correspond à ce faisceau est bitangente à l'hypersurface V_8^4.

Cela étant, soit K une cubique gauche non dégénérée de l'espace Σ. Les quadriques passant par K forment un réseau et il leur correspond donc, dans S_9, les points d'un plan que nous désignerons par ϖ.

Un faisceau de quadriques circonscrites à la courbe K possède comme courbe-base la cubique gauche et une de ses cordes. Les quadriques ont même plan tangent en chacun des points d'appui de cette corde sur K; par suite, la droite du plan ϖ qui correspond à ce faisceau est une bitangente de V_8^4. Il en résulte que toutes les droites du plan ϖ étant des bitangentes de V_8^4, le plan ϖ touche cette hypersurface en chaque point d'intersection. L'hypersurface V_8^4 étant du quatrième ordre, le plan ϖ lui est tangent le long d'une conique. Cette conique ne peut d'ailleurs dégénérer, car alors la cubique gauche K serait commune à ∞^1 cônes formant un faisceau, ce qui est impossible.

A une cubique gauche non dégénérée de l'espace Σ *correspond dans l'espace* S_9 *un plan* ϖ *touchant l'hypersurface* V_8^4 *le long d'une conique.*

16. — Représentation des cubiques gauches dégénérées. — Les quadriques circonscrites à une cubique gauche dégénérée forment un réseau; il leur correspond donc dans S_9 les points d'un plan. Nous allons examiner quelles sont les positions de ce plan pour les diverses dégénérescences possibles de la cubique gauche.

1° Supposons tout d'abord que la cubique gauche dégénère en une conique L et en une droite a s'appuyant sur L, mais non située dans le plan de cette conique. Il existe un faisceau de cônes circonscrits à la courbe $L + a$; il est formé par les cônes projetant L des points de a. A ce faisceau correspond, dans S_9, une droite a_1, tracée sur V_8^4 et rencontrant V_6^{10} en un seul point (correspondant à la quadrique formée du plan de L et du plan passant par a, tangent à L). Il existe, d'autre part, un faisceau de quadriques dégénérées circonscrites à la courbe $L + a$; elles sont formées du plan de L et des plans passant par a. Il correspond à ces quadriques une droite a_2 de V_6^{10}, ne rencontrant pas V_3^8, mais rencontrant a_1 au point commun à cette droite et à V_6^{10}.

Un faisceau de quadriques circonscrites à la courbe $L + a$ contient une quadrique dégénérée (comptant pour deux cônes) et un cône proprement dit (comptant pour deux). Par suite, le plan des droites a_1, a_2 est tangent à l'hypersurface V_8^4 le long de a_1.

A une cubique gauche dégénérée en une droite et une conique correspond un plan ϖ touchant l'hypersurface V_8^4 le long d'une droite et rencontrant la variété V_6^{10} suivant une droite.

On remarquera que la droite a_1 détermine complètement le plan ϖ.

2° Supposons la cubique gauche dégénérée en deux droites gauches a, b et en une troisième droite c s'appuyant sur les deux premières.

Il n'existe pas de cône proprement dit circonscrit à la cubique $a+b+c$, mais il y a deux faisceaux de quadriques dégénérées contenant cette courbe ; ce sont les quadriques formées du plan ac et d'un plan passant par b, ou du plan bc et d'un plan passant par a. Le plan ϖ représentant les quadriques circonscrites à la cubique $a+b+c$ rencontre donc V_6^{10} suivant deux droites. Ces deux droites ont en commun le point qui correspond à la quadrique formée des plans ac, bc.

A une cubique gauche dégénérée en trois droites correspond un plan ϖ rencontrant la variété V_6^{10} suivant deux droites.

3° Supposons la cubique gauche dégénérée en deux droites coplanaires a, b, la première comptant deux fois. Les quadriques circonscrites à cette courbe se raccordent le long de la droite a. Nous représenterons cette courbe par $2a+b$.

Il n'existe aucun cône proprement dit circonscrit à la courbe $2a+b$; il existe, par contre, un faisceau de quadriques dégénérées passant par cette courbe; elles sont formées du plan ab et d'un plan passant par a. Ce faisceau contient la quadrique formée du plan ab compté deux fois. A ce faisceau correspond une droite a_1 appartenant à V_6^{10} et rencontrant V_3^8 en un point.

Dans un faisceau de quadriques circonscrites à la courbe $2a+b$ ne se trouve aucun cône; ce faisceau contient une seule quadrique dégénérée qui compte pour quatre cônes. Il en résulte que la droite correspondante est tangente à V_6^{10} en un point de a_1; le plan ϖ, représentant les quadriques circonscrites à la courbe $2a+b$, est tangent à V_6^{10} le long de la droite a_1.

A une cubique gauche formée de trois droites dont deux sont confondues correspond un plan ϖ tangent à la variété V_6^{10} le long d'une droite s'appuyant en un point sur la variété V_3^8.

Les positions du plan ϖ, lorsque la cubique gauche est dégénérée, peuvent évidemment s'obtenir comme cas limites d'un plan touchant l'hypersurface V_8^4 le long d'une conique.

17. — Problème inverse. — Nous partirons maintenant d'un plan touchant l'hypersurface V_8^4 le long d'une conique et nous déterminerons la configuration correspondante dans l'espace Σ.

1° Considérons tout d'abord un plan ϖ touchant V_8^4 le long d'une conique irréductible γ, ne rencontrant pas V_6^{10}. Aux points de ϖ correspondent, dans Σ, les quadriques Q d'un réseau $|Q|$; aucune de ces quadriques n'est dégénérée. A une droite de ϖ correspond un faisceau de quadriques Q ne contenant que deux cônes, comptant chacun pour deux; il en résulte que la courbe-base de ce faisceau se compose d'une cubique gauche et d'une droite, cette cubique et cette droite passant par les sommets des deux cônes considérés. Soient P_1, P_2, P' trois points de γ; Q_1, Q_2, Q' les cônes correspondants dans $|Q|$; A_1, A_2, A' leurs sommets. D'après la propriété qui vient d'être énoncée, les trois cônes passent par les trois points A_1, A_2, A'. Si P' décrit γ, le cône Q' décrit la série des cônes du réseau $|Q|$, en passant toujours par A_1, A_2. On en conclut que toutes les quadriques du réseau $|Q|$ passent par A_1, A_2 et, plus généralement, par les sommets de tous les cônes du réseau. De plus, ces sommets appartiennent tous aux deux cônes Q_1, Q_2. Soit K la cubique gauche (passant par A_1, A_2) qui, avec la droite $A_1 A_2$, forme l'intersection des cônes Q_1, Q_2. Si le point A' appartient à K, les quadriques du réseau $|Q|$ contiennent K et le plan ϖ représente cette courbe. Supposons que cela puisse ne pas avoir lieu, c'est-à-dire que le point A' appartienne à la droite $A_1 A_2$. Les quadriques Q contiennent la droite $A_1 A_2$ et rencontrent encore, en dehors de cette droite, la cubique gauche K en quatre points A_3, A_4, A_5, A_6 qui sont des points-base du réseau $|Q|$. Mais alors, la quadrique formée des plans $A_1 A_2 A_3$ et $A_4 A_5 A_6$, par exemple, appartient au réseau, contrairement à l'hypothèse que celui-ci ne contient aucune quadrique dégénérée. Un plan ϖ touchant V_8^4 le long d'une conique non dégénérée, ne rencontrant pas V_6^{10}, représente donc toujours une cubique gauche (non dégénérée) de Σ.

2° Considérons maintenant un plan ϖ' touchant V_8^4 le long d'une conique irréductible γ' rencontrant V_6^{10} en un nombre fini de points, au moins égal à l'unité. Soit P un de ces points. Les quadriques Q de Σ correspondant aux points de ϖ' forment un réseau $|Q|$ contenant au moins une quadrique dégénérée en deux plans distincts α_1, α_2. Nous désignerons cette quadrique par la notation $\alpha_1 + \alpha_2$. A une droite du plan ϖ' passant par P correspond un faisceau de quadriques ne contenant, en dehors de la quadrique $\alpha_1 + \alpha_2$, qu'un seul cône. Si ce cône est irréductible, comme cela a lieu en général, il doit compter pour deux et, par suite, son sommet appartient à l'un des plans α_1, α_2 (au moins).

Soient P_1, P_2 deux points de γ' n'appartenant pas à V_6^{10}; Q_1, Q_2 les cônes qui leur correspondent dans $|Q|$; A_1, A_2 les sommets de ces cônes. Le faisceau déterminé par Q_1, Q_2 ne contient aucune quadrique dégénérée et ne contient aucun cône en dehors de Q_1, Q_2; ces deux cônes comptent pour deux chacun et, par suite, ils ont en commun une cubique gauche K passant par A_1, A_2 et la droite A_1A_2. Les points d'intersection de K et de la quadrique $\alpha_1 + \alpha_2$ sont des points-base du réseau $|Q|$. Les cas suivants peuvent alors se présenter :

A) Les points A_1, A_2 appartiennent à un même plan de la quadrique $\alpha_1 + \alpha_2$, par exemple à α_1. Les quadriques Q passent par la droite $a = A_1A_2$, par le troisième point A_3 où K rencontre encore α_1 et par les trois points A_4, A_5, A_6, où K rencontre α_2. Le réseau $|Q|$ contient quatre quadriques dégénérées en deux plans distincts : $aA_3 = \alpha_1$, $A_4A_5A_6 = \alpha_2$; aA_4, $A_3A_5A_6$; aA_5, $A_3A_4A_6$ et aA_6, $A_3A_4A_5$. Le plan ϖ' rencontre en quatre points, et en quatre seulement, la variété V_6^{10}.

B) Les points A_1, A_2 n'appartiennent pas à un même plan de la quadrique $\alpha_1 + \alpha_2$; par exemple, A_1 appartient à α_1 et A_2 à α_2. Considérons un troisième cône proprement dit Q_3 du réseau $|Q|$. Le sommet A_3 de ce cône appartient à l'un des plans α_1, α_2, par exemple à α_1 (et éventuellement à la droite $\alpha_1\alpha_2$). Les quadriques Q (et en particulier le cône Q_2) passent par la droite A_1A_3, ce qui est absurde, puisque nous avons supposé le cône Q_2 irréductible.

C) L'un des points A_1, A_2 appartient à un des plans α_1, α_2 et le second à la droite $\alpha_1\alpha_2$. Les quadriques Q passent par la droite A_1A_2 et par les points d'intersection de K avec α_1, α_2. Ce cas ne diffère pas du premier.

D) Les deux points A_1, A_2 appartiennent à la droite $\alpha_1\alpha_2$. Dans ce cas, comme la quadrique $\alpha_1 + \alpha_2$ peut être considérée comme un cône de sommet A_1 tangent au cône Q_1 le long de la droite $\alpha_1\alpha_2$, les cônes Q_1 et $\alpha_1 + \alpha_2$ déterminent un faisceau de cônes appartenant au réseau $|Q|$ et la conique γ' est réductible, contrairement à l'hypothèse.

En résumé, *si un plan est tangent à l'hypersurface* V_8^4 *le long d'une conique irréductible, il représente un réseau de quadriques ayant pour courbe-base une cubique gauche irréductible, s'il ne rencontre pas la variété* V_6^{10}*; il représente un réseau de quadriques ayant pour base une droite et quatre points, s'il rencontre la variété* V_6^{10} *en un nombre fini de points (et dans ce cas il rencontre cette variété en quatre points).*

18. — Plans tangents a l'hypersurface V_8^4 le long de deux droites. — Considérons un plan ϖ' touchant l'hypersurface V_8^4 le long de deux droites a_1, a_2 n'appartenant pas à la variété V_6^{10}. Aux points de ϖ' correspondent, dans Σ, les quadriques Q d'un réseau $|Q|$ contenant deux faisceaux de cônes. De plus, un troisième faisceau tiré de $|Q|$ d'une manière quelconque ne contient que deux cônes (comptant chacun pour deux). Nous désignerons par Q_1 les cônes correspondant aux points de a_1, par Q_2 ceux qui correspondent aux points de a_2, et par $|Q_1|$, $|Q_2|$ respectivement les faisceaux formés par ces cônes. Ces deux faisceaux ont un cône en commun, correspondant au point $a_1 a_2$, cône que nous désignerons par Q_{12}.

Observons tout d'abord que les faisceaux $|Q_1|$, $|Q_2|$ ne peuvent être formés de cônes ayant même sommet, car alors toutes les quadriques de $|Q|$ seraient des cônes et le plan ϖ' appartiendrait tout entier à V_8^4.

Nous aurons trois cas à considérer, suivant la nature des faisceaux $|Q|_1$, $|Q_2|$.

1° Les faisceaux $|Q_1|$, $|Q_2|$ sont formés de cônes ayant respectivement pour sommets des points distincts A_1, A_2. Le cône Q_{12} est nécessairement formé de deux plans α_1, α_2 passant par la droite $A_1 A_2$. Le faisceau de quadriques déterminé par un cône Q_1 et un cône Q_2 ne contenant que deux cônes, Q_1 passe par A_2 et Q_2 par A_1 ; donc toutes les quadriques Q passent par la droite $A_1 A_2$. Le faisceau $|Q_1|$ est déterminé par Q_{12} et par un cône quelconque du faisceau ; par suite, tous les cônes du faisceau se touchent le long de la droite $A_1 A_2$. Il en est de même des cônes Q_2. Les cônes Q_1, Q_2 ne peuvent avoir même plan tangent le long de $A_1 A_2$, car alors toutes les quadriques Q seraient des cônes et ϖ' appartiendrait entièrement à V_8^4. Nous désignerons par β_1 le plan tangent aux cônes Q_1 le long de $A_1 A_2$, par β_2 le cône tangent aux cônes Q_2 le long de la même droite.

Si le plan β_1 est distinct de α_1, α_2, le faisceau $|Q_1|$ contient, outre Q_{12}, une quadrique dégénérée en le plan β_1 et un plan passant par A_1 mais non par A_2. La droite a_1 rencontre V_6^{10} en deux points dont l'un est $P = a_1 a_2$. Si le plan β_1 coïncide avec l'un des plans α_1 ou α_2, le faisceau $|Q_1|$ ne contient qu'une seule quadrique dégénérée Q_{12} et la droite a_1 est tangente à V_6^{10} au point P. De même pour le faisceau $|Q_2|$. Il en résulte que les droites a_1, a_2 sont des cordes de V_6^{10} ayant un point d'appui sur cette variété en commun, ces cordes pouvant éventuellement être tangentes à cette variété.

Dans le cas général, les quadriques Q ont en commun la droite $A_1 A_2$, deux points B_1, B_2 situés l'un dans α_1, l'autre dans α_2 ; elles ont en outre même plan tangent en A_1 et A_2 (précisément β_2 en A_1, β_1 en A_2). Un cône Q_1 et un cône Q_2, irréductibles, ont en commun une cubique gauche K passant par A_1, A_2, B_1, B_2 Les quadriques Q sont tangentes à K en A_1, A_2 et rencontrent encore cette courbe en B_1, B_2.

Lorsque β_1 coïncide avec α_1, le point B_1 coïncide avec A_2 et les quadriques Q osculent K en A_2. Si, de plus, β_2

coïncide avec α_2, B_2 coïncide avec A_1 et les quadriques Q osculent K en A_1 (*).

2° Le faisceau $|Q_1|$ est formé de cônes ayant même sommet A_1 et le faisceau $|Q_2|$ de cônes touchant un plan α le long d'une droite a'. Les cônes Q_2 ont en commun une conique l tangente à α en un point de a', mais le plan de cette conique ne passe pas par a'.

Les faisceaux ayant un cône Q_{12} en commun, la droite a' doit passer par A_1. Deux cônes Q_1, Q_2 déterminent un faisceau ne contenant que deux cônes; par suite, les cônes Q_1 passent par a'. Les cônes Q_1 ne peuvent toucher α le long de a', car alors toutes les quadriques Q seraient des cônes et ϖ' appartiendrait à V_8^4. Les cônes Q_1 rencontrent la conique l, en dehors de a', en trois points fixes, puisque le cône Q_{12} projetant l de A_1 appartient au faisceau $|Q_1|$.

Le faisceau $|Q_1|$ contient trois cônes dégénérés; donc a_1 est une trisécante de V_6^{10}; le faisceau $|Q_2|$ contient un seul cône dégénéré, formé par le plan α et le plan de la conique l; donc a_2 est une sécante de V_6^{10}.

Les quadriques Q passent par a', par trois points fixes situés sur l et ont même plan tangent a en A_1 (**).

(*) Par un choix convenable du tétraèdre de référence, le réseau $|Q|$ peut être représenté par

$$\lambda_1(a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4)$$
$$+ \lambda_2(b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{14}x_1x_4) + 2\lambda_3x_3x_4 = 0,$$

les points A_1, A_2 ayant pour coordonnées respectivement (1,0,0,0), (0,1,0,0). Les cas limites s'obtiennent en faisant soit $a_{24} = 0$ ou $b_{13} = 0$, soit $a_{24} = b_{13} = 0$.

(**) Nous nous bornons ici au cas général ; on pourrait examiner sans difficulté les cas où certains des cônes dégénérés de $|Q_1|$ sont confondus, ou encore le cas où le point A_1 est le point commun à la conique l et à la droite a'. Dans ce dernier cas, la quadrique dégénérée du faisceau $|Q_2|$ ne pourra d'ailleurs appartenir au faisceau $|Q_1|$.

3° Les faisceaux $|Q_1|$, $|Q_2|$ sont formés de cônes tangents à des plans α_1, α_2 respectivement le long de droites a'_1, a'_2. Les faisceaux ayant en commun le cône Q_{12}, les droites a'_1, a'_2 se rencontrent en un point A. Répétant un raisonnement déjà fait plusieurs fois, on voit que tout cône Q_1 (ou Q_2) contient le sommet de tout cône Q_2 (ou Q_1); par suite, les droites a'_1, a'_2 coïncident en une droite a' et les plans α_1, α_2 sont nécessairement distincts. Le cône Q_{12} est formé des plans α_1, α_2. Si l_1 est la conique commune aux cônes Q_1, remarquons que l_1 se trouve sur Q_{12} et ne peut, d'autre part, appartenir à un plan passant par a'. Nous sommes donc conduit à une absurdité et le troisième cas doit être écarté.

En résumé : *Si un plan touche l'hypersurface* V_8^4 *suivant deux droites n'appartenant pas à la variété* V_6^{10}, *il lui correspond dans l'espace* Σ *un réseau de quadriques ayant pour base une droite, deux points ou trois points et ayant de plus même plan tangent en deux ou en un point de la droite (où il lui correspond un réseau, cas particulier de l'un des précédents). Les droites suivant lesquelles le plan touche l'hypersurface* V_8^4 *sont ou des bisécantes de la variété* V_6^{10} *ayant en commun un point d'appui, ou une trisécante et une sécante simple de cette variété.*

Les figures examinées ici sont des cas particuliers de celle qui a été rencontrée en étudiant les plans touchant V_8^4 suivant une conique γ' rencontrant V_6^{10} (nécessairement) en quatre points. Actuellement, γ' dégénère en deux droites.

19. — Cubique gauche passant par six points. — Soient K une cubique gauche irréductible; A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 six points distincts de cette courbe. Aux quadriques de Σ passant par A_i correspondent dans S_9 les points d'un hyperplan σ_8 tangent à V_8^4 le long d'un espace σ_5. Nous désignerons cet hyperplan par $(\sigma_8)_i$.

Les hyperplans $(\sigma_8)_1$, $(\sigma_8)_2$, ..., $(\sigma_8)_6$ ont en commun un espace linéaire S_3, à trois dimensions, dont les points représentent les quadriques passant par A_1, A_2, ..., A_6. Cet espace rencontre l'hypersurface V_8^4 suivant une surface du quatrième ordre que nous allons démontrer être une surface de Kümmer Φ_2^4.

L'espace S_3 rencontre la variété V_6^{10} en dix points doubles pour la surface Φ_2^4. Ces points correspondent aux couples de plans passant par les six points A_1, A_2, ..., A_6. Nous désignerons par P_{1ik} le point double de Φ_2^4 qui correspond à la quadrique formée du plan passant par les points A_1, A_i, A_k et du plan passant par les trois autres points du groupe A_1, A_2, ..., A_6.

Les quadriques passant par la droite $A_i A_k$ et par les quatre points restants du groupe A_1, A_2, ..., A_6 forment un réseau auquel correspond, dans S_9, un plan que nous désignerons par ϖ'_{ik}. Les cônes contenus dans le réseau considéré ont leurs sommets sur la droite $A_i A_k$; il leur correspond, dans S_9, les points d'une conique γ'_{ik} le long de laquelle le plan ϖ_{ik} touche l'hypersurface V_8^4 et, par suite, la surface Φ_8^4. La conique γ'_{ik} passe par quatre des dix points doubles de la surface Φ_2^4 considérés plus haut, puisque le réseau de quadriques considéré contient quatre quadriques formées de deux plans passant par les six points A_1, A_2, ..., A_6 (l'un de ces plans passant par $A_i A_k$ et par un troisième des six points A_1, A_2, ..., A_6).

Les six points A_1, A_2, ..., A_6 peuvent être répartis en quinze couples; donc il existe quinze plans touchant Φ_8^4 le long d'une conique et contenant quatre des dix points doubles P_{1ik}.

Aux quadriques passant par K correspondent les points d'un plan ϖ touchant V_8^4 et, par suite, Φ_2^4 le long d'une conique γ. Les points de celle-ci représentent les cônes projetant K des points de cette courbe. La conique γ'_{ik} a en commun, avec γ, les deux points qui représentent les cônes projetant K des points A_i, A_k. Désignons respectivement ces points de γ par P_i, P_k. Les points P_i, P_k sont doubles pour la surface Φ_2^4, puisque situés dans des plans distincts, tangents à la surface en ces points.

La surface Φ_2^4 possède donc seize points doubles et seize plans la touchant chacun suivant une conique passant par six des points doubles; il en résulte que Φ_2^4 est une surface de Kummer.

L'espace linéaire à trois dimensions, commun à six hyperplans σ_8 tangents à l'hypersurface V_8^4 le long d'espaces σ_5, rencontre cette hypersurface suivant une surface de Kummer dont dix des points doubles appartiennent à la variété V_6^{10}. Les six autres points doubles de la surface de Kummer sont situés dans un plan touchant la surface suivant une conique et représentant la cubique gauche passant par les six points de Σ correspondant aux six espaces σ_8 considérés.

Le plan ϖ appartient à ∞^1 espaces σ_8.

Observons que les quadriques d'un réseau ayant pour points-base $A_1, A_2, \ldots, A_6$, se rencontrent encore en deux points. A ce réseau correspond, d'autre part, un plan de S_3; on a donc une correspondance (2, 1) entre les points de Σ et les plans de l'espace S_3 considéré. Si l'on transforme S_3 par dualité, on retrouve la correspondance utilisée par Reye et De Paolis pour l'étude de la surface de Kummer (*).

(*) Reye, *Ueber Strahlensysteme zweiter Classe und die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotenpunkten* (Journal de Crelle, 1879, t. LXXXVI); De Paolis, *Alcune pro-*

Remarque. — Il serait possible d'étudier les cas particuliers de la surface de Kummer en partant des résultats précédents. On pourrait, par exemple, considérer la surface découpée sur V_8^4 par l'espace à trois dimensions représentant les quadriques de Σ, passant par cinq points et ayant une tangente déterminée en l'un d'eux. La surface obtenue ainsi est un cas particulier de la surface de Kummer certaines coniques singulières étant dégénérées et certains points singuliers étant réunis; il suffirait d'appliquer certains résultats obtenus plus haut (n° 18). Nous espérons y revenir plus tard.

20. — Plans touchant l'hypersurface V_8^4 le long d'une droite. — Considérons un plan ϖ touchant l'hypersurface V_8^4 le long d'une droite a n'appartenant pas à V_6^{10}, et supposons, de plus, que ce plan rencontre V_6^{10} en une infinité de points. L'hypersurface V_8^4 étant du quatrième ordre, le plan ϖ la rencontre, en dehors de a, suivant une conique qui doit appartenir (en tout ou en partie) à V_6^{10}. Comme cette variété est double pour V_8^4, le plan ϖ la rencontrera nécessairement suivant une droite b et les droites a, b formeront l'intersection complète de V_8^4 et de ϖ.

Aux points de b correspondent, dans Σ, des quadriques

---

prietà della superficie di Kummer (Rend. R. Accad. Lincei, juillet 1890). Voir aussi Snyder, *An application of (1, 2) quaternary correspondence to the Weddle and Kummer surfaces* (Trans. of the Amer. Math. Society, 1911, t. XII). Nous avons utilisé la correspondance (1, 2) en question pour construire des surfaces de genres un et de rang trois et quatre dans les notes : *Sur les surfaces du quatrième ordre possédant six points doubles biplanaires ordinaires* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1922); *Sur les involutions cycliques d'ordre quatre appartenant à une surface de genres un* (Idem, 1923).

dégénérées en deux plans en général distincts, formant un faisceau. Si les deux plans formant une quadrique sont variables, ils appartiennent nécessairement à un faisceau de plans et forment une involution dans ce faisceau. Si l'un des plans est fixe, l'autre appartient à un faisceau de plans.

Cela étant, cherchons à déterminer les réseaux de quadriques de Σ susceptibles d'être représentés par le plan ϖ. Nous observerons que dans un faisceau de quadriques correspondant à une droite du plan ϖ distincte de a, b, se trouvent une quadrique dégénérée et un cône; ce dernier doit compter pour deux et, par suite, son sommet appartient à la quadrique dégénérée. Il en résulte que les sommets des cônes qui correspondent à a appartiennent à toutes les quadriques dégénérées qui correspondent à b.

Nous désignerons par $|Q|$ le réseau des quadriques Q qui correspondent aux points de ϖ; par $|Q_1|$ le faisceau des cônes correspondant aux points de a; par $|Q_2|$ le faisceau des quadriques dégénérées qui correspondent aux points de b. Les faisceaux $|Q_1|$, $|Q_2|$ ont en commun une quadrique Q_{12}.

1° Les cônes Q_1 ont même sommet A et les quadriques Q_2 sont formées par les couples de plans d'une involution dans un faisceau de plans d'axe p. La droite p doit passer par A. Mais alors, comme les quadriques Q_2 peuvent être considérées comme des cônes de sommet A, toutes les quadriques Q seraient des cônes et le plan ϖ appartiendrait à V_8^4. Ce cas est à exclure.

2° Les cônes Q_1 ont même sommet A et les quadriques Q_2 sont formées d'un plan fixe α et d'un plan variable dans un faisceau d'axe p. Le plan α passe par A, mais la droite p ne peut passer par A, sans quoi toutes les quadriques Q seraient des cônes de sommet A. La quadrique

Q_{12} est formée des plans α et Ap. Il en résulte que les droites-base du faisceau $|Q_1|$ sont situées : deux a_1, a_2 dans α et deux dans Ap, rencontrant la droite p en A_1, A_2. Les quadriques Q passent par les droites a_1, a_2 et par les points A_1, A_2. Le faisceau $|Q_1|$ contient en général trois couples de plans dont l'un est Q_{12} ; par suite la droite a rencontre V_6^{10} en trois points dont l'un appartient à b.

On observera que le réseau $|Q|$ peut être considéré comme formé par les quadriques passant par la droite a_1, par trois points A_1, A_2 et A_3 (ce dernier étant situé sur α_2) et ayant en un point A de a_1, un plan tangent fixe passant par A_3. Ce réseau est donc un cas particulier du réseau des quadriques passant par une droite et par quatre points.

3° Les cônes Q_1 passent par une droite a_1 et ont même plan tangent α_1 le long de cette droite; les quadriques Q_2 sont formées par les couples d'une involution dans un faisceau de plans d'axe p.

Les quadriques Q_2 devant contenir tous les sommets des cônes Q_1, la droite p doit coïncider avec a_1. Mais alors, comme les quadriques Q_2 peuvent être considérées comme des cônes touchant α_1 le long de a_1, toutes les quadriques Q seront des cônes, et ce cas doit être exclu.

4° Les cônes Q_1 touchent un plan α_1 le long d'une droite a_1 et les quadriques Q_2 sont formées par un plan fixe α et par un plan variable dans un faisceau d'axe p. Les cônes Q_1 ont en commun une conique l dont le plan β ne passe pas par a_1 ; cette conique l touche le plan α_1 au point βa_1, par lequel elle passe. La quadrique Q_{12} est nécessairement formée des plans α_1 et β ; par suite, α coïncide avec α_1 ou avec β. Si les plans α et α_1 coïncident, les quadriques Q_2 peuvent être considérées comme des cônes touchant α_1 le long des a_1 et alors toutes les quadriques Q sont des cônes; ce cas doit être exclu. Si les plans α et β coïncident, la droite p doit coïncider avec a_1, puisque les quadriques Q_2 doivent contenir les sommets de tous les cônes Q_1. Le réseau $|Q|$ est formé par les quadriques passant par a_1 et l, c'est-à-dire par une cubique gauche dégénérée.

Si un plan touche l'hypersurface V_8^4 le long d'une droite et rencontre la variété V_6^{10} en une infinité de points (formant nécessairement une droite), il représente un réseau de quadriques passant par une cubique gauche dégénérée en une droite et une conique, ou bien un cas particulier d'un réseau de quadriques passant par une droite et par quatre points.

21. — Plans coupant la variété V_6^{10} suivant une conique. — La variété V_6^{10} étant double pour l'hypersurface V_8^4, un plan n'appartenant pas à V_8^4 et coupant V_6^{10} suivant une conique (éventuellement dégénérée) doit être considéré comme un plan touchant V_8^4 le long de cette conique. Soit ϖ un tel plan; supposons en premier lieu qu'il rencontre V_6^{10} suivant une conique irréductible γ.

Désignons par $|Q|$ le réseau des quadriques Q de Σ qui correspondent aux points de ϖ; par Q_1 les quadriques dégénérées de $|Q|$ qui correspondent aux points de γ.

Si les quadriques Q_1 ont un plan fixe commun α, les autres plans enveloppent un cône de seconde classe de sommet A. Mais alors, toutes les quadriques Q sont formées du plan α et de plans passant par A. Ce cas est à exclure, car alors ϖ appartiendrait à V_6^{10}.

Si les quadriques Q_1 sont formées de couples de plans passant par une droite a, chaque plan appartenant à deux couples, toutes les quadriques Q sont formées de couples de plans passant par a. Mais alors, ϖ appartient à V_6^{10}, et ce cas est à exclure.

Reste alors le cas où les quadriques Q_1 sont formées de plans passant l'un par une droite a_1, l'autre par une droite a_2 ne rencontrant pas a_1, et se correspondant dans une projectivité entre les faisceaux d'axes a_1, a_2 (si les droites a_1, a_2 avaient un point commun, toutes les quadriques Q seraient coniques et le plan ϖ appartiendrait à V_8^4). Les quadriques Q passent par les droites a_1, a_2 et n'ont aucun point en commun en dehors de ces droites, car alors la projectivité entre les faisceaux de plans d'axes a_1, a_2 serait dégénérée et la conique γ serait formée de deux droites.

Observons que les quadriques passant par a_1, a_2 forment un système linéaire ∞^3 et sont représentées par les points d'un espace linéaire S_3 de S_9. Aux ∞^2 quadriques formées d'un plan passant par a_1 et d'un plan passant par a_2 correspondent les points d'une quadrique Ψ_2^2 de S_3, appartenant à V_6^{10}. L'espace S_3 rencontre V_8^4 uniquement suivant cette quadrique Ψ_2^2 de V_6^{10}. Le plan ϖ est un plan de l'espace S_3, non tangent à Ψ_2^2. Il est aisé de voir que si le plan ϖ est tangent à Ψ_2^2, le réseau de quadriques correspondant a, outre a_1, a_2, une droite-base s'appuyant sur a_1, a_2.

Supposons maintenant que la conique γ dégénère en deux droites distinctes c_1, c_2, et désignons par Q_1 les quadriques qui correspondent aux points de c_1; par Q_2 celles qui correspondent aux points de c_2; par Q_{12} celle qui correspond au point $c_1 c_2$. Trois cas peuvent se présenter :

1° Les quadriques Q_1, Q_2 sont formées de couples de plans d'involutions données dans deux faisceaux de plans d'axes respectifs a_1, a_2. Pour que la quadrique Q_{12} existe, il faut que les droites a_1, a_2 se rencontrent en un point A (au moins). Les droites a_1, a_2 ne peuvent être identiques, car alors toutes les quadriques du réseau $|Q|$ seraient formées de deux plans passant par a_1. Le point A est donc unique et la quadrique Q_{12} est formée par le plan $\alpha = a_1 a_2$ compté deux fois. Toutes les quadriques du réseau $|Q|$ sont des cônes de sommet A, et ce cas est à rejeter.

2° Les quadriques Q_1 sont formées des couples de plans d'une involution donnée dans un faisceau d'axe a_1 et les quadriques Q_2 sont formées d'un plan fixe α_2 et d'un plan variable dans un faisceau d'axe a_2. Le plan α_2 doit passer par a_1; la droite α_2 doit rencontrer a_1 en (au moins) un point A; et la quadrique Q_{12} est formée des plans α_2 et $a_1 a_2$. (Si a_1 et a_2 coïncidaient, toutes les quadriques de $|Q|$ seraient dégénérées; donc A est unique.) Toutes les quadriques Q sont des cônes de sommet A, et ce cas doit être rejeté.

3° Les quadriques Q_1 sont formées d'un plan fixe α_1 et d'un plan variable dans un faisceau d'axe a_1, les quadriques Q_2 d'un plan fixe α_2 et d'un plan variable dans un faisceau d'axe a_2. Si les plans α_1, α_2 sont confondus, les droites a_1, a_2 doivent se rencontrer en un point A, la quadrique Q_{12} étant alors formée de α_1 et du plan $a_1 a_2$. Dans ces conditions, toutes les quadriques Q sont dégénérées, et ce cas doit être rejeté. Les plans α_1 et α_2 étant distincts, α_1 doit passer par a_2 et α_2 par a_1, la quadrique Q_{12} étant formée des plans α_1, α_2. Les quadriques Q passent par les droites a_1, a_2, $\alpha_1 \alpha_2$. Actuellement, le plan ϖ est tangent à la quadrique Ψ_2^2 représentant les quadriques dégénérées passant par a_1, a_2. Les trois droites a_1, a_2, $\alpha_1 \alpha_2$ forment une cubique gauche dégénérée. (Les droites a_1, a_2 ne peuvent évidemment pas se rencontrer, sans quoi toutes les quadriques Q seraient des cônes.)

Reste enfin à examiner le cas où la conique γ dégénère en une droite c comptée deux fois. Nous désignerons encore par Q les quadriques correspondant dans Σ aux points de ϖ, par Q_1 celles, formant un faisceau, qui correspondent aux points de la droite c.

A une droite de ϖ, distincte de c, correspond un faisceau de quadriques ne contenant aucun cône et contenant une seule quadrique dégénérée en deux plans généralement distincts. Ce faisceau est complètement déterminé par une quadrique Q_1, formée de deux plans β_1, β_2, que nous supposerons distincts, et par une quadrique non conique Q_0. Si la quadrique Q_0 n'est pas tangente à la droite $\beta_1\beta_2$, le faisceau contient deux cônes; pour que l'un de ces cônes vienne se confondre avec la quadrique $Q_1 = \beta_1 + \beta_2$, il faut et il suffit que Q_0 soit tangente à la droite $\beta_1\beta_2$; pour que le dernier cône vienne également se confondre avec $Q_1 = \beta_1 + \beta_2$, il faut et il suffit que Q_0 soit tangente à l'un des plans β_1, β_2 en un point de la droite $\beta_1\beta_2$ (ou en particulier passe par cette droite).

Cela étant, nous distinguerons deux cas :

1° Les quadriques Q_1 sont formées par les couples de plans d'une involution donnée dans le faisceau de plans d'axe a. Laissons la quadrique Q_0 fixe et faisons varier Q_1 dans le faisceau $|Q_1|$. Le plan tangent à Q_0 en chaque point a est déterminé; par suite, Q_0 (et de même toutes les quadriques Q) passe par la droite a.

Considérons deux quadriques non coniques Q_0, Q'_0 de $|Q|$; elles ont en commun, outre a, une cubique gauche. Le faisceau déterminé par Q_0, Q'_0 ne peut contenir de cône et ne contient précisément qu'une quadrique dégénérée Q_1. Pour cela, il faut et il suffit que la cubique gauche dégénère en trois droites dont l'une est a; il faut donc que Q_0 et Q'_0 et, par suite, toutes les quadriques Q se raccordent le long de a.

Les quadriques se raccordant le long d'une droite a

forment un système linéaire représenté dans S_9 par les points d'un espace linéaire à trois dimensions contenant le plan σ_2 de la conique Γ_1^2 de V_3^8 correspondant à a. Le plan ϖ est un plan de cet espace non tangent à la conique Γ_1^2. On retrouve ainsi un cas particulier de celui où la conique γ est irréductible, la quadrique Ψ_2^2 étant formée du plan σ_2 compté deux fois.

2° Les quadriques Q_1 sont formées d'un plan fixe α et d'un plan variable dans un faisceau d'axe a. Supposons que le plan α ne passe pas par a. Alors les quadriques Q doivent toucher l'un des plans α, β en un point de la droite $\alpha\beta$, β étant un plan quelconque passant par a; elles ne peuvent d'ailleurs contenir la droite $\alpha\beta$ que pour des positions particulières de β, car alors elles seraient toutes dégénérées. Tous les plans passant par a ne peuvent être tangents à une quadrique non conique de $|Q|$, les points de contact étant dans α, car alors la quadrique serait nécessairement tangente à α en $A = \alpha a$ et, ce serait, par suite, un cône. Les quadriques Q sont donc tangentes à α; chacune d'elles ne peut avoir une infinité de points de contact avec α, car alors toutes les quadriques seraient des cônes; il faut donc que les quadriques Q touchent α en A. Ces quadriques ne peuvent passer par a, car alors ce seraient des cônes. Le réseau $|Q|$ peut être défini par le faisceau $|Q_1|$ et par une quadrique non conique Q_0 tangente à α en A. Il en résulte que les quadriques Q rencontrent α en deux droites fixes distinctes a_1, a_2 passant par A, et rencontrent a en un second point fixe A_1.

Les quadriques passant par les droites a_1, a_2 et par un point A_1 forment un système linéaire ∞^3 contenant un réseau de cônes et, dans ce réseau, trois faisceaux de quadriques dégénérées en des plans toujours distincts. Ces quadriques sont représentées par les points d'un espace à trois dimensions S_3 de S_9 rencontrant V_6^{10} suivant deux droites incidentes r_1, r_2 et un plan ρ (*). Le plan ϖ appartient à cet espace et passe par l'intersection c des plans ρ et $r_1 r_2$.

Supposons maintenant que le plan α passe par a. Les quadriques Q ne peuvent toucher α aux points de a, car alors ces quadriques seraient des cônes. Il en résulte que les quadriques Q se raccordent le long de a et touchent le plan α en un point déterminé de a. Il est aisé de voir que les quadriques Q rencontrent α suivant une seconde droite a_1. Les quadriques Q passent donc par une cubique gauche dégénérée en la droite a comptée deux fois et en la droite a_1. Le plan ϖ est tangent à la conique Γ_1^2 de V_3^8 qui correspond à la droite a.

Un plan ϖ n'appartenant pas à l'hypersurface V_8^4 et coupant la variété V_6^{10} suivant une conique représente :

Un réseau de quadriques passant par une cubique gauche dégénérée; ou

Un réseau de quadriques ayant pour points-base les points des deux droites gauches distinctes ou infiniment voisines; ou

Un réseau particulier de quadriques passant par deux droites coplanaires et par un point (en dehors du plan de ces droites).

22. — *Les variétés de plans touchant l'hypersurface V_8^4 le long d'une conique.* — De ce qui précède, il résulte qu'un plan ϖ touchant l'hypersurface V_8^4 suivant une

(*) L'espace S_3 appartient à l'hyperplan σ_8 relatif à A. Cet hyperplan est, comme on l'a vu, tangent à l'hypersurface V_8^4; il en est donc de même de l'espace S_3. Celui-ci rencontre l'hypersurface V_8^4 suivant une quadrique formée du plan $r_1 r_2$ et du plan ρ.

conique représente un réseau de quadriques caractérisé de la manière suivante :

1° Réseau formé par les quadriques passant par une cubique gauche (éventuellement réductible). Les plans ϖ correspondants sont en nombre ∞^{12} et forment une variété que nous désignerons par M_{12}.

2° Réseau formé par les quadriques passant par une droite et quatre points (ou cas limites de ce réseau). Les plans ϖ correspondants sont en nombre ∞^{16} et forment une variété que nous désignerons par M_{16}.

3° Réseau formé par les quadriques passant par deux droites gauches distinctes ou infiniment voisines. Les plans ϖ correspondants coupent la variété V_6^{10} suivant une conique irréductible ou dégénérée en une corde de V_3^8 comptée deux fois. Ces plans sont en nombre ∞^{11} et forment une variété que nous désignerons par M_{11}.

4° Réseau formé par les quadriques passant par deux droites coplanaires et par un point extérieur. Les plans ϖ correspondants touchent la variété V_6^{10} suivant une droite et sont en nombre ∞^{11} ; ils forment une variété que nous désignerons par M'_{11}.

Aucune de ces variétés n'appartient entièrement à une autre, mais elles ont des éléments en commun. La recherche de ces variétés-intersections ne présente guère de difficulté et nous ne la ferons pas ici. Bornons-nous à signaler que, par exemple, les variétés M_{12} et M_{11} ont en commun ∞^{10} plans.

Des quatre variétés M_{12}, M_{16}, M_{11}, M'_{11}, seule la première contient des plans ne rencontrant pas la variété V_6^{10}; par suite,

Les plans de l'espace S_9 *représentant les cubiques gauches de l'espace* Σ *forment une variété* ∞^{12}, M_{12}. *Le plan général de cette variété touche l'hypersurface* V_8^4 *le* *long d'une conique et ne rencontre pas la variété* V_6^{10}. *La variété* M_{12} *est caractérisée par cette propriété de son plan général.*

23. — Interprétation de la géométrie de la cubique gauche. — Nous dirons que la géométrie de l'espace Σ ayant pour éléments les cubiques gauches de cet espace et pour groupe fondamental le groupe des ∞^{15} homographies de Σ est la géométrie projective des cubiques gauches dans un espace à trois dimensions.

Soit ω une homographie de Σ; elle échange entre elles les quadriques de Σ. D'une manière plus précise, ω change une quadrique non conique en une quadrique non conique, un système linéaire de quadriques en un système linéaire de quadriques de même dimension, une quadrique conique en une quadrique conique, un couple de plans en un couple de plans, un plan en un plan. Il en résulte qu'à ω correspond dans S_9 une homographie Ω de cet espace transformant en elles-mêmes l'hypersurface V_8^4 et les variétés V_6^{10}, V_3^8.

Inversement, soit Ω une homographie de S_9 transformant en elles-mêmes V_8^4, V_6^{10} et V_3^8. L'homographie Ω transforme, par suite, en lui-même le système linéaire $|F_2^4|$ des surfaces de Véronèse de V_3^8. Par suite, il correspond à Ω, dans Σ, une transformation birationnelle ω. De plus, ω transforme les plans de Σ en des plans de Σ et, puisque Ω échange entre elles les coniques Γ_1^2 de V_3^8, ω transforme les droites de Σ en droites de Σ. Il en résulte que ω est une homographie de Σ.

Le groupe g_{15} des homographies de Σ est, par suite, holoédriquement isomorphe au groupe G_{15} des homographies de S_9 laissant invariantes V_8^4, V_6^{10}, V_3^8.

Les homographies Ω de G_{15} échangent entre eux les plans de la variété M_{12} ; par suite, *la géométrie projective des cubiques gauches d'un espace linéaire à trois dimensions est équivalente à la géométrie ayant pour éléments les plans de la variété* M_{12} *et pour groupe fondamental le groupe* G_{15} *des* ∞^{15} *homographies de l'espace* S_9 *laissant invariantes l'hypersurface* V_8^4 *et les variétés* V_6^{10}, V_3^8.

24. — Remarque. — On pourrait déduire du résultat qui vient d'être obtenu une autre interprétation hyperspatiale de la géométrie projective des cubiques gauches.

Les plans de l'espace S_9 sont en nombre ∞^{21}. On sait que l'on peut représenter biunivoquement, sans exception, ces plans par les points d'une « variété grassmannienne » W_{21}, à vingt et une dimensions, appartenant à un espace linéaire S_{120}, à cent-vingt dimensions. La géométrie projective des plans de S_9 est équivalente à la géométrie de la variété W_{21} ayant pour groupe fondamental le groupe des homographies de S_{120} laissant invariante cette variété W_{21} (*).

Aux plans de la variété M_{12} de S_9 correspondent, dans W_{21}, les points d'une variété W_{12}, à douze dimensions. Aux homographies du groupe G_{15} de S_9 correspondent des homographies de S_{120} laissant invariantes les variétés W_{21} et W_{12} ; ces homographies forment un groupe G'_{15}. La géométrie projective des cubiques gauches de Σ est équivalente à la géométrie de W_{12} ayant pour groupe fondamental le groupe G'_{15}. Nous nous contenterons de ces indications sommaires sur cette interprétation.

Liége, le 26 avril 1927.

(*) Bertini, *loc. cit.*, pp. 32-39. Voir également : Severi, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immerse in uno spazio lineare.* (Annali di Matematica, 1915, 3e sér., t. XXIV, pp. 89-121.)