ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*. Séance du 11 octobre 1924.
pp. 429-433.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — **L'Univers d'Einstein et la métrique cayleyenne elliptique,**

par L. GODEAUX, professeur à l'École Militaire (*).

M. Einstein (**) a été conduit à la considération d'un Univers défini par l'élément linéaire

$$ds^2 = -dr^2 - R^2 \sin^2 \frac{r}{R} [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] + c^2 dt^2. \qquad (E)$$

Une coupe à temps constant de cet univers est un espace à trois dimensions d'élément linéaire

$$d\sigma^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \qquad (S)$$

Cet espace (S) a la courbure constante positive $\frac{1}{R^2}$.

On peut obtenir une représentation commode de l'espace (S) *en utilisant une métrique cayleyenne elliptique à trois dimensions* (***). C'est ce que nous nous proposons de montrer dans cette note. Dans une seconde note, nous étudierons par le même procédé l'Univers de M. De Sitter.

(*) Présentée par Th. De Donder à la séance du 5 juillet 1924.

(**) *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie.* SITZUNGSB. Berlin, 1917. Voir aussi DE DONDER, *La Gravifique einsteinienne.* Paris, Gauthier-Villars, 1921, et J. BECQUEREL, *Le Principe de Relativité.* Paris, Gauthier-Villars, 1922.

(***) On trouvera les éléments de géométrie cayleyenne utilisés ici dans les ouvrages suivants : DARBOUX, *Principes de Géométrie analytique.* Paris, Gauthier-Villars, 1917 ; BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale.* Pise, Spoerri, 2e édit., 1903, t. I.

1. — Soit, en coordonnées homogènes,

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

l'équation de la quadrique fondamentale ou absolu définissant une métrique elliptique de Cayley à trois dimensions, de courbure $\frac{1}{R^2}$. Le facteur de proportionnalité des coordonnées homogènes des points non situés sur l'absolu sera fixé, suivant l'usage, par la relation

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \qquad (1)$$

Dans ces conditions, l'élément linéaire de l'espace cayleyen est donné par

$$d\sigma^2 = R^2\,(dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \qquad (2)$$

Si r est la distance cayleyenne du point O (0, 0, 0, 1) au point M (x_0, x_1, x_2, x_3), nous avons

$$\cos\frac{r}{R} = x_3. \qquad (3)$$

La sphère cayleyenne de centre O et de rayon r a pour équation

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \operatorname{tg}^2\frac{r}{-} = 0.$$

Si nous posons, avec Darboux,

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \sin\frac{r}{R}\sin\theta\cos\varphi, \\ x_1 &= \sin\frac{r}{R}\sin\theta\sin\varphi, \\ x_2 &= \sin\frac{r}{R}\cos\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

nous obtenons une représentation paramétrique de la sphère considérée. Les quantités r, θ, φ peuvent être prises comme coordonnées d'un point de l'espace cayleyen et, au moyen des formules (3), (4), l'élément linéaire (2) devient

$$d\sigma^2 = dr^2 + R^2\sin^2\frac{r}{R}\,[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2].$$

C'est précisément l'élément linéaire (S). L'Univers (E) peut donc être représenté par

$$ds^2 = -R^2(dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + c^2dt^2, \qquad (E_1)$$

formule à laquelle on adjoindra la relation (1).

2. — Les équations des lignes géodésiques d'un espace à quatre dimensions d'élément linéaire

$$ds^2 = \sum \sum_k a_{ik} dy_i dy_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

sont, comme on sait,

$$\frac{d^2y_i}{ds^2} + \sum_\lambda \sum_\mu \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ i \end{Bmatrix} \frac{dy_\lambda}{ds}\frac{dy_\mu}{ds} = 0.$$

Si l'on applique ces formules à l'espace (E), on obtient

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2r}{ds^2} &= R \sin\frac{r}{R}\cos\frac{r}{R}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + R\sin\frac{r}{R}\cos\frac{r}{R}\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2, \\
\frac{d^2\theta}{ds^2} &= \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 2\,\frac{1}{R}\operatorname{cotg}\frac{r}{R}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds}, \\
\frac{d^2\varphi}{ds^2} &= -2\,\frac{1}{R}\operatorname{cotg}\frac{r}{R}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds} - 2\operatorname{cotg}\theta\,\frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds}, \\
\frac{d^2t}{ds^2} &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Passons aux variables x_0, x_1, x_2, x_3 au moyen des formules (3) et (4). Les équations (I) deviennent

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x_i}{ds^2} &= \frac{x_i}{R^2}\left[1 - c^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\right], \qquad (i = 0, 1, 2, 3), \\
\frac{d^2t}{ds^2} &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

3. — Dans les équations (II), prenons t comme variable indépendante. La dernière équation donne

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{k}, \qquad (5)$$

où k est une constante. Les quatre premières équations deviennent alors

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{c^2}{R^2}x_i = \frac{k^2}{R^2}x_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \qquad \text{(III)}$$

Ces équations différentielles donnent, comme on sait, les trajectoires des points matériels libres de l'Univers (E). Proposons-nous de déterminer la trajectoire d'un point matériel qui, au temps $t = 0$, occupe la position Y (y_0, y_1, y_2, y_3), cette trajectoire étant, au point Y, perpendiculaire au plan

$$\eta_0 x_0 + \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0 \ (^*).$$

L'équation (5), jointe à l'équation (E)

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\sigma^2,$$

donne

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{c^2 - k^2}.$$

On doit avoir

$$\eta_i = R\left(\frac{dx_i}{d\sigma}\right)_{t=0} \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

et, par suite,

$$\eta_i = \frac{R}{\sqrt{c^2 - k^2}}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{t=0} \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Les conditions initiales du mouvement sont donc

$$(x_i)_{t=0} = y_i, \qquad \left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\eta_i}{R}\sqrt{c^2 - k^2}, \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

(*) En métrique cayleyenne elliptique, une direction est déterminée par le plan perpendiculaire à cette direction au point d'où elle est issue. La tangente en ce point à cette direction passe par le pôle par rapport à l'absolu du plan considéré. Le pôle et le point sont situés à la distance cayleyenne $\frac{\pi R}{2}$ l'un de l'autre. Le facteur de proportionnalité des coordonnées tangentielles η est fixé par la relation

$$\eta_0^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1.$$

Les équations (III) s'intègrent immédiatement et donnent

$$x_i = k_{i1} \cos \frac{\sqrt{c^2 - k^2}}{R} t + k_{i2} \sin \frac{\sqrt{c^2 - k^2}}{R} t \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

En tenant compte des conditions initiales pour déterminer les constantes k_{i1}, k_{i2}, on trouve

$$x_i = y_i \cos \frac{\sqrt{c^2 - k^2}}{R} t + \eta_i \sin \frac{\sqrt{c^2 - k^2}}{R} t \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \qquad \text{(IV)}$$

Ces équations représentent une droite.

En particulier, les trajectoires des rayons lumineux sont données par $ds = 0$. Par (5) cette condition donne $k = 0$ et, par suite,

$$x_i = y_i \cos \frac{c}{R} t + \eta_i \sin \frac{c}{R} t \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

4. — Des considérations physiques ont amené M. De Sitter (*) à admettre que, dans l'espace (S), la droite a pour longueur π R (espace de Newcomb). On obtient cet espace en considérant comme identiques les points (x_0, x_1, x_2, x_3) et $(-x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$.

Posons, dans les équations (IV),

$$v = \sqrt{c^2 - k^2} = \frac{d\sigma}{dt};$$

elles deviennent

$$x_i = y_i \cos \frac{vt}{R} + \eta_i \sin \frac{vt}{R}.$$

Au temps $t = 0$, le point matériel occupe la position Y. Au temps $t = \frac{R\pi}{v}$, les formules précédentes donnent

$$x_i = -y_i.$$

Le point matériel est donc revenu, d'après la convention faite plus haut, à son point de départ.

En particulier, au bout du temps $t = \frac{R\pi}{c}$, un rayon lumineux revient à son point de départ.

(*) *On the curvature of space.* K. Akad. Amsterdam, Proceedings, 1917.

Bruxelles. — Imprimerie M. Hayez, rue de Louvain 112.