Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro dont le genre linéaire est égal à deux,

par LUCIEN GODEAUX, correspondant de l'Académie.

Les premières recherches sur les propriétés des surfaces algébriques qui ne sont pas altérées par des transformations birationnelles (Cayley, Noether,...) ont conduit à l'introduction de trois invariants : le genre géométrique p_g, le genre arithmétique p_a ($\leq p_g$) et le genre linéaire $p^{(1)}$. Plus tard fut introduit l'invariant de Zeuthen-Segre I, lié aux précédents par la relation

$$I + p^{(1)} = 12p_a + 9.$$

Le système canonique $|C|$ d'une surface algébrique F a la dimension $p_g - 1$, le genre $p^{(1)}$ et le degré $p^{(1)} - 1$. M. Enriques [1] fut conduit à introduire les systèmes pluricanoniques $|2C|$, $|3C|$, ... et les plurigenres P_2, P_3, ..., le i-genre P_i étant la dimension du système i-canonique $|iC|$, augmentée d'une unité. L'importance de la considération des plurigenres fut immédiatement mise en lumière par les résultats suivants : La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface algébrique soit rationnelle est (Castelnuovo)

$$p_a = P_2 = 0.$$

Il existe des surfaces algébriques dépourvues de courbes canoniques ($p_g = 0$), mais sur lesquelles existent des courbes

(1) Nous renvoyons, pour les renseignements bibliographiques, à l'article de MM. G. CASTELNUOVO et F. ENRIQUES, *Die algebrischen Flächen vom gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus.* (*Encyklopaedie der Math. Wissenschaften*, t. III, 6e cahier, 1915.)

bicanoniques effectives ($P_2 \geq 1$). Le premier exemple d'une telle surface a été donné par M. Enriques [1]. C'est une surface qui peut se ramener, par une transformation birationnelle, à une surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre (proprement dit ou d'un angle tétraèdre). Les genres de cette surface ont pour valeurs

$$p_a = p_g = P_3 = P_5 = \cdots = 0, \qquad p^{(1)} = P_2 = P_4 = \cdots = 1.$$

Elle est caractérisée par

$$p_a = P_3 = 0, \qquad P_2 = 1.$$

Elle possède une courbe bicanonique d'ordre zéro.

Un second exemple est dû à M. Castelnuovo [2]. Celui-ci a construit une surface du septième ordre ayant une droite triple r, une conique double ne rencontrant pas la droite r, trois tacnodes dont les plans tacnodaux passent par la droite r. Cette surface est dépourvue de courbes canoniques, mais possède un faisceau de courbes bicanoniques elliptiques : les quartiques elliptiques découpées sur la surface par les plans passant par la droite triple r. Pour cette surface, on a

$$p_a = p_g = 0, \qquad p^{(1)} = 1, \qquad P_2 = 2, \ldots$$

Plus tard, M. Enriques [3] a construit un plan double ayant une courbe de diramation du dixième ordre (réductible) douée

(1) F. Enriques, Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche (n° 39) (*Mémoire della Soc. Ital. delle Scienze*, 1896); Sopra le superficie algebriche di bigenere uno (*idem*, 1906). — Pour la bibliographie relative à ces surfaces, voir nos recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 1926 et 1927). — Voir aussi A. Bloch, Fonctions méromorphes et surfaces algébriques (*Journal de Liouville*, 1931).

(2) G. Castelnuovo, Sulle superficie di genere zero. (*Mémoire della Soc. Ital. delle Science*, 1896.)

(3) F. Enriques, Sopra le superficie... (*loc. cit.*).

de trois points quadruples en ligne droite et de trois couples de points triples infiniment voisins, pour lequel on a

$$p_a = p_g = 0, \qquad p^{(1)} = 1, \qquad P_2 = 1, ..., P_6 > 1,$$

possédant une courbe bicanonique d'ordre supérieur à zéro.

Il est intéressant de rechercher s'il existe des surfaces algébriques de genres $p_a = p_g = 0$, pour lesquelles on a $p^{(1)} > 1$, $P_2 > 1$. Le réponse à cette question est affirmative ; nous avons effectivement construit une surface algébrique régulière dépourvue de courbes canoniques, mais possédant un faisceau de courbes bicanoniques de genre quatre [1]. Nous allons montrer dans cette note comment on arrive à de telles surfaces, pour lesquelles on a

$$p_a = p_g = 0, \qquad p^{(1)} = 2, \qquad P_2 = 2, \qquad P_3 = 4, ...$$

La méthode utilisée nous permettra sans doute d'obtenir d'autres surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, pour lesquelles on aura $p^{(1)} > 2$.

Ajoutons que, d'après une communication de M. Enriques, un de ses élèves, M. Campedelli, a réussi à construire des plans doubles ayant une courbe de diramation du dixième ordre, pour lesquels on a $p^{(1)} = 2$ et $p^{(1)} = 3$. Ces résultats sont encore inédits.

1. Soit F une surface algébrique dont le système canonique $|C|$ soit irréductible. Supposons que F soit transformée en elle-même par une transformation birationnelle T, cyclique, de période p. La transformation T échange entre elles les courbes canoniques C et en transforme quelques-unes en elles-mêmes, ou bien T transforme chaque courbe canonique en elle-même.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

1° La surface F est régulière ($p_a = p_g$) ;

(1) L. GODEAUX, Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux. (*Rend. R. Accad. Lincei*, 2e sem. 1931.)

*

2° On a

$$p = p_a + 1;$$

3° Le système canonique $|C|$ de F n'est pas composé au moyen de l'involution d'ordre p, I_p, engendrée sur F par T ou, en d'autres termes, une courbe canonique C n'est pas en général transformée en elle-même par T.

4° L'involution I_p est dépourvue de points unis.

Dans ces conditions, le nombre des systèmes linéaires formés de courbes canoniques transformées en elles-mêmes par T est au plus égal à $p - 1$.

Soit Φ une surface image de l'involution I_p engendrée par T sur F. Entre les genres arithmétiques π_a de Φ et p_a de F on a la relation [1]

$$p_a + 1 = p(\pi_a + 1),$$

c'est-à-dire que, dans le cas actuel, on a $\pi_a = 0$. La surface F étant régulière, il en est de même de la surface Φ et le genre géométrique de celle-ci est $\pi_g = 0$. La surface Φ est donc dépourvue de courbes canoniques.

Le système bicanonique $|2C|$ de la surface F est transformé en lui-même par T; il ne peut être composé au moyen de l'involution I_p et contient donc deux ou plusieurs systèmes linéaires formés de courbes transformées en elles-mêmes par T. Il peut arriver qu'à un de ces systèmes correspondent, sur la surface Φ, des courbes bicanoniques de cette surface, dont le bigenre est donc $P_2 \geq 1$,

Entre les genres linéaires $p^{(1)}$ de F et $\pi^{(1)}$ de Φ on a la relation [2]

$$p^{(1)} - 1 = p(\pi^{(1)} - 1).$$

(1) Voir F. Severi, Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica (*Rend. Ist. Lombardo*, 1903). — Pour le cas particulier de ces relations qui nous intéresse ici, voir aussi L. Godeaux, Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique. (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1919.)

(2) Severi (*loc. cit.*); Godeaux (*loc. cit.*).

2. Nous allons appliquer les considérations précédentes au cas où la surface F est une surface du cinquième ordre unie pour l'homographie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^3 x_4, \tag{1}$$

ε étant une racine primitive cinquième de l'unité.

L'équation de la surface du cinquième ordre, unie pour l'homographie (1) et ne passant pas par les points unis de cette homographie (sommets du tétraèdre de référence), peut s'écrire

$$\left.\begin{aligned} & a_1 x_1^5 + a_2 x_2^5 + a_3 x_3^5 + a_4 x_4^5 \\ & + b_1 x_2^2 x_3 x_4^2 + b_2 x_3^2 x_4^2 x_1 + b_3 x_4 x_1^2 x_2^2 + b_4 x_1^2 x_2 x_3^2 \\ & + c_1 x_1^3 x_3 x_4 + c_2 x_2^3 x_3 x_1 + c_3 x_3^3 x_4 x_2 + c_4 x_4^3 x_1 x_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Sur cette surface, l'homographie (1) engendre une involution I_5, d'ordre cinq, dépourvue de points unis.

Le système canonique $|C|$ de la surface (2) est le système des sections planes, la surface étant dépourvue de points multiples. De plus, la surface est régulière et l'on a

$$p_a = p_g = 4, \qquad p^{(1)} = 6.$$

Il y a quatre sections planes de la surface (2) unies pour l'homographie (1) ; nous les désignons par C_1, C_2, C_3, C_4. Elles sont respectivement découpées par les plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Le système bicanonique complet de la surface F d'équation (2) est découpé par les quadriques de l'espace. Il existe cinq faisceaux de courbes bicanoniques unies pour l'homographie (1); ces faisceaux sont respectivement déterminés par les courbes

$$2C_1 \text{ et } C_3 + C_4; \qquad C_1 + C_2 \text{ et } 2C_4;$$
$$C_1 + C_3 \text{ et } 2C_2; \qquad C_1 + C_4 \text{ et } C_2 + C_3; \qquad C_2 + C_4 \text{ et } 2C_3.$$

Le système tricanonique complet est découpé sur F par les surfaces cubiques ; il contient cinq systèmes linéaires ∞^3 de courbes unies pour l'homographie (1). Ces systèmes contiennent respectivement les courbes

$$\begin{array}{llll}
3C_1, & C_1+C_3+C_4, & 2C_2+C_4, & C_2+2C_3; \\
3C_2, & C_1+C_2+C_3, & 2C_1+C_4, & C_3+2C_4; \\
3C_3, & C_2+C_3+C_4, & 2C_1+C_2, & C_1+2C_4; \\
3C_4, & C_1+C_2+C_4, & C_1+2C_3, & 2C_2+C_3; \\
2C_1+C_3, & 2C_2+C_1, & 2C_3+C_4, & 2C_4+C_2.
\end{array}$$

3. Envisageons la surface Φ image de l'involution I_5 et désignons par $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ les courbes qui correspondent respectivement aux courbes C_1, C_2, C_3, C_4 sur cette surface. D'après la formule de Zeuthen, les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ sont de genre deux. De plus, comme le système $|C|$ a le degré cinq, les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ ont en commun deux-à-deux un point. Nous désignerons par A_{ik} le point commun aux courbes Γ_i, Γ_k.

Posons

$$\Gamma'_1 \equiv 2\Gamma_1, \quad \Gamma'_2 \equiv 2\Gamma_2, \quad \Gamma'_3 \equiv 2\Gamma_3, \quad \Gamma'_4 \equiv 2\Gamma_4, \quad \Gamma'_5 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_4.$$

Les systèmes $|\Gamma'_1|, \ldots, |\Gamma'_5|$ sont des faisceaux qui ont pour transformés, sur la surface F, les faisceaux de courbes bicanoniques unies pour l'homographie (1). Les deux premiers et les deux derniers de ces systèmes coupent la courbe Γ_1 en des couples de points fixes, à savoir respectivement A_{13} et A_{14}, A_{12} (compté deux fois); A_{14} (compté deux fois); A_{12} et A_{13}. Le système $|\Gamma'_3|$ découpe, sur la courbe Γ_1, une série linéaire g_2^1 qui ne peut être que la série canonique. Ce système contient les courbes $2\,\Gamma_3$ et $\Gamma_2+\Gamma_4$; par suite aucune de ses courbes ne peut comprendre Γ_1 comme partie. Il en résulte que la surface Φ est dépourvue de courbe canonique.

On voit de même que les séries canoniques des courbes Γ_2, Γ_3. Γ_4 sont respectivement découpées par les courbes des systèmes $|\Gamma'_1|$, $|\Gamma'_4|$, $|\Gamma'_2|$.

Posons maintenant

$$\Gamma_1'' \equiv 3\Gamma_1, \quad \Gamma_2'' \equiv 3\Gamma_2, \quad \Gamma_3'' \equiv 3\Gamma_3, \quad \Gamma_4'' \equiv 3\Gamma_4, \quad \Gamma_5'' \equiv 2\Gamma_1 + \Gamma_3,$$

et observons que, d'après la formule de Zeuthen, les courbes $\Gamma_1', \ldots, \Gamma_5'$ sont de genre quatre.

L'un des systèmes $|\Gamma_1''|, \ldots, |\Gamma_5''|$ doit découper sur une quelconque des courbes Γ_3' la série canonique de cette courbe. Observons que si le système $|\Gamma_1''|$ découpait la série canonique sur une courbe Γ_3, comme $|\Gamma_1''|$ contient la courbe $\Gamma_2 + 2\,\Gamma_3$ et qu'on a par suite

$$|\Gamma_1''| = |\Gamma_2 + \Gamma_3'|,$$

la courbe Γ_2 serait une courbe canonique de la surface Φ, ce qui est impossible.

On a également

$$|\Gamma_3''| = |\Gamma_3 + \Gamma_3'|, \quad |\Gamma_4''| = |\Gamma_1 + \Gamma_3'|, \quad |\Gamma_5''| = |\Gamma_4 + \Gamma_3'|$$

et par suite le système $|\Gamma_2''|$ est l'adjoint du système $|\Gamma_3'|$. Il est donc le second adjoint de la courbe Γ_1. Comme $|\Gamma_2''|$ contient les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$, $2\,\Gamma_1, + \Gamma_4$, on a

$$|\Gamma_2'' - \Gamma_1| = |\Gamma_2 + \Gamma_3| = |\Gamma_1 + \Gamma_4| = |\Gamma_5'|.$$

Par suite le faisceau $|\Gamma_5'|$ est le système bicanonique de la surface Φ.

Observons maintenant que l'on a

$$|\Gamma_1'' - \Gamma_5'| = |\Gamma_3|, \quad |\Gamma_2'' - \Gamma_5'| = |\Gamma_1|, \quad |\Gamma_3'' - \Gamma_5'| = |\Gamma_4|,$$
$$|\Gamma_4'' - \Gamma_5'| = \Gamma_2.$$

Par suite, le système $|\Gamma_5''|$ est l'adjoint de $|\Gamma_5'|$; c'est donc le système tricanonique de la surface Φ.

De cette analyse il résulte que la surface Φ a les genres arithmétique et géométrique nuls, le genre linéaire égal à deux, le bigenre égal à deux, le trigenre égal à quatre :

$$p_a = p_g = 0, \qquad p^{(1)} = P_2 = 2, \qquad P_3 = 4.$$

On en conclut que le i-genre de Φ est

$$P_i = \frac{1}{2} i(i-1) + 1.$$

De plus, le diviseur de Severi de la surface Φ est $\sigma = 5$ [1].

4. En rapportant projectivement les courbes Γ_5'' aux plans de l'espace, nous obtiendrons un modèle projectif de la surface Φ dont les sections planes seront donc les courbes tricanoniques.

Le système tricanonique $|3\,C|$ de F a le degré 45. Les ∞^3 de ces courbes transformées des courbes Γ_5'' ont en commun les cinq points communs aux courbes C_1, C_4 et les cinq points communs aux courbes C_2, C_3. Le modèle projectif de la surface Φ envisagé aura donc l'ordre sept. Le système $|\Gamma_5''|$ a le degré virtuel neuf et deux points-base simples A_{14}, A_{23}. A ces points correspondront donc des droites exceptionnelles sur le modèle projectif tricanonique de Φ.

Les transformées des courbes de $|\Gamma_5''|$ sur F sont découpées par les surfaces cubiques

$$\lambda_1 x_1^2 x_3 + \lambda_2 x_2^2 x_1 + \lambda_3 x_3^2 x_4 + \lambda_4 x_4^2 x_2 = 0.$$

Pour obtenir le modèle tricanonique de Φ, nous poserons

$$\frac{X_1}{x_1^2 x_3} = \frac{X_2}{x_2^2 x_1} = \frac{X_3}{x_3^2 x_4} = \frac{X_4}{x_4^2 x_2}. \tag{3}$$

L'équation (2) donne alors

$$\left.\begin{aligned} & a_1 X_1^4 X_2 X_4^2 + a_2 X_2^4 X_4 X_3^2 + a_3 X_3^4 X_1 X_2^2 + a_4 X_4^4 X_3 X_1^2 \\ + {} & X_1 X_2 X_3 X_4 [b_1 X_2 X_3 X_4 + b_2 X_3 X_4 X_1 + b_3 X_4 X_1 X_2 + b_4 X_1 X_2 X_3 \\ & + c_1 X_1^2 X_4 + c_2 X_2^2 X_3 + c_3 X_3^2 X_2 + c_4 X_4^2 X_1] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

qui est l'équation de la surface Φ.

---

(1) Voir notre note Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité. (*Bull. de l'Acad. des Sc. de Cracovie*, 1914.)

Les transformées des courbes de $|\Gamma'_5|$ sur la surface F sont découpées par les quadriques

$$\mu_1 x_1 x_4 + \mu_2 x_2 x_3 = 0.$$

En éliminant les x entre cette équation et les équations (3), on obtient

$$\mu_1 X_1 X_4 + \mu_2 X_2 X_3 = 0. \qquad (5)$$

Ces quadriques découpent donc, sur la surface (4), les courbes bicanoniques Γ'_5.

Les courbes Γ'_5 passent par les points A_{12}, A_{13}. A_{24}, A_{34} qui sont, pour la surface (4), les sommets du tétraèdre de référence.

Les droites exceptionnelles qui correspondent, sur la surface (4), aux points A_{14}, A_{23}, sont respectivement $X_1 = X_4 = 0$, $X_2 = X_3 = 0$.

5. Appelons r_1, r_2, r_3, r_4 les arêtes du tétraèdre de référence $A_{12}A_{13}$, $A_{12}A_{24}$, $A_{13}A_{34}$, $A_{24}A_{34}$. La surface (4) passe doublement par les droites r_1, r_2, r_3, r_4 et ces droites sont tacnodales pour la surface. Celle-ci passe simplement par les deux autres arêtes du tétraèdre (droites exceptionnelles).

En tout point de la droite r_1, d'équations $X_1 = X_2 = 0$, les plans tangents à la surface (4) sont confondus avec le plan $X_1 = 0$. En tout point de la droite r_2 d'équations $X_2 = X_4 = 0$, les plans tangents à la surface sont confondus avec le plan $X_2 = 0$. En tout point de la droite r_3, d'équations $X_1 = X_3 = 0$, les plans tangents sont confondus avec le plan $X_3 = 0$. Enfin, en tout point de la droite r_4, d'équations $X_3 = X_4 = 0$, les plans tangents sont confondus avec le plan $X_4 = 0$. De plus, une droite située dans le plan $X_1 = 0$, par exemple, coupe la surface en quatre points confondus avec le point d'intersection de cette droite avec r_1. Ceci montre que tous les points de la droite r_1 sont tacnodaux. En d'autres termes, la surface (4) possède une droite double, infiniment voisine de r_1, dans le plan $X_1 = 0$. On arrive à des conclusions analogues pour les droites r_2, r_3, r_4.

Cela étant, les adjointes d'ordre n-4 à la surface (4) sont des surfaces cubiques qui doivent passer par les droites r_1, r_2, r_3, r_4 en y touchant respectivement les plans $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$. De telles surfaces n'existent pas.

Les bi-adjointes à la surface (4) sont des surfaces du sixième ordre passant par les droites r_1, r_2, r_3, r_4 de manière que chacune de ces droites compte pour huit dans l'intersection de ces surfaces avec (4). Ces bi-adjointes sont donc formées des faces du tétraèdre de référence et du faisceau de quadriques (5). Les courbes bicanoniques sont des sextiques gauches de genre quatre.

Les surfaces tri-adjointes à la surface (4) sont des surfaces du neuvième ordre passant par r_1, r_2, r_3, r_4, chacune de ces droites comptant pour douze dans l'intersection. Ces surfaces sont formées des faces du tétraèdre de référence comptées chacune deux fois, et d'un plan variable.

Ainsi se trouvent à nouveau vérifiés les résultats obtenus plus haut.

On observe que dans l'équation (4) les nombres b, c peuvent être nuls en tout ou en partie, mais qu'il est essentiel que les nombres a ne soient pas nuls (ce qui résulte d'ailleurs de l'hypothèse que les surfaces (2) ne peuvent passer par les points unis de l'homographie (1)).

Ajoutons que les sommets du tétraèdre de référence sont triples pour la surface (4).

Les courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 sont représentées sur la surface (4) par les domaines des droites doubles r_1, r_2, r_3, r_4 respectivement. Les courbes Γ_3' sont découpées par les plans

$$\mu_1 X_3 + \mu_2 X_4 = 0.$$

Ces plans découpent la série canonique g_2^1 sur la droite double de genre deux r_1.

6. On peut obtenir d'autres modèles projectifs de la surface Φ, dans un espace à trois dimensions, en rapportant projectivement aux plans de cet espace les courbes de l'un des systèmes $|\Gamma_1''|, \ldots, |\Gamma_4''|$. Envisageons par exemple le système $|\Gamma_1''|$. Aux courbes Γ_1'' correspondent sur la surface (2) les courbes tricanoniques découpées par les surfaces

$$\lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_1 x_3 x_4 + \lambda_3 x_2^2 x_4 + \lambda_4 x_2 x_3^2 = 0.$$

Posons

$$\frac{Y_1}{x_1^3} = \frac{Y_2}{x_1 x_3 x_4} = \frac{Y_3}{x_2^2 x_4} = \frac{Y_4}{x_2 x_3^2}. \tag{6}$$

On obtiendra l'équation du modèle projectif de la surface Φ en éliminant les z entre l'équation (2) et les équations (6). On peut également, en comparant les équations (3) et (6), déduire

$$\frac{X_1}{Y_1 Y_2 Y_4} = \frac{X_2}{Y_1 Y_3 Y_4} = \frac{X_3}{Y_2^2 Y_4} = \frac{X_4}{Y_2^2 Y_3}. \tag{7}$$

L'élimination des X entre les équations (4) et (7) donnera l'équation du modèle projectif de la surface Φ envisagé, à savoir

$$\left.\begin{aligned} & a_1 Y_1^3 Y_2^2 Y_1 Y_4^2 + a_2 Y_1^2 Y_3^3 Y_4^3 + a_3 Y_1 Y_2^3 Y_4^4 + a_4 Y_2^6 Y_3^2 \\ & + Y_1 Y_2^2 Y_3 Y_4^2 (b_1 Y_2 Y_3 + b_2 Y_2^2 + b_3 Y_1 Y_3 + b_4 Y_1 Y_4) \\ & + Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 (c_1 Y_1 Y_2^2 Y_4 + c_2 Y_1 Y_3 Y_4^2 + c_3 Y_2^2 Y_3^2 + c_4 Y_2^3 Y_3) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

C'est une surface du huitième ordre, comme on pouvait d'ailleurs le prévoir, puisque le système $|\Gamma_1''|$ a comme point-base le point A_{12}.

Les équations (7) définissent une transformation birationnelle entre les espaces des surfaces (4) et (8).

Les courbes bicanoniques sont découpées sur la surface (8) par les plans

$$\mu_1 Y_2 + \mu_2 Y_4 = 0$$

et les courbes tricanoniques par les surfaces cubiques du système homaloïdal de la transformation birationnelle (7).

7. De ce qui précède il résulte que :

Une surface du septième ordre, circonscrite à un tétraèdre dont les sommets sont des points triples et dont quatre arêtes formant un quadrilatère gauche sont des droites doubles tacnodales de la surface, a les genres arithmétique et géométrique nuls, le genre linéaire et le bigenre égaux à deux, le trigenre égal à quatre.

Liége, le 8 décembre 1931.
