Bulletin de la Classe des sciences

Nouvelles recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (quatrième note)

Lucien Godeaux

Résumé

Étude du comportement en un point uni des courbes d'un système linéaire appartenant à une involution.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Nouvelles recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique

(quatrième note)

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Étude du comportement en un point uni des courbes d'un système linéaire appartenant à une involution.

Dans nos premières recherches sur les involutions cycliques d'ordre premier p n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique, nous avons construit un système linéaire de courbes contenant p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution dont l'un est privé de points-base, les autres ayant pour points-base les points unis de l'involution. Nous avons tout d'abord étudié le comportement des courbes du premier système passant par un point uni en ce point et déterminé la structure d'un point uni et celle du point de diramation correspondant sur la surface image de l'involution (1).

Dans trois notes successives (2), nous avons cherché les relations qui existent entre les dimensions des p systèmes dont il a été question plus haut. Dans cette nouvelle note, nous étudions le comportement en un point uni des courbes des systèmes linéaires qui ont les points unis pour points-base. Nous nous sommes limité à un cas particulier

(1) On trouvera un exposé de ces recherches dans notre *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Éditions Cremonese, 1963). Nous supposons nos résultats connus.

(2) Les trois premières notes ont paru dans le Bulletin de l'Académie, 1970, pp, 1192-1204, 1326-1337, 1338-1351.

qui devait d'ailleurs être traité séparément. Le cas général sera traité ultérieurement.

Un point uni A est l'origine d'un certain nombre de branches linéaires ou super linéaires. Si les courbes d'un système linéaire | D | appartenant à l'involution passent en A, elles ont des contacts d'un certain ordre avec une ou plusieurs de ces branches. Il nous arrivera d'écrire qu'un point P est le dernier point d'une branche appartenant aux courbes D, sous-entendu que les points de la branche infiniment voisins successifs de P n'appartiennent pas à toutes les courbes D. Nous nous excusons de cette abréviation qui pourrait être mal comprise.

1. Soit F une surface algébrique appartenant à un espace S_r à r dimensions transformée en soi par une homographie H dont la période est un nombre premier $p = 2\nu + 1$, possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ dont le premier seul rencontre la surface en un nombre fini de points. Sur F, H détermine une involution cyclique I n'ayant qu'un nombre fini de points unis: les points de rencontre de σ_0 avec la surface.

Considérons un point uni A et supposons qu'il soit de seconde espèce, c'est-à-dire que le plan tangent à F en A rencontre en un point deux des espaces $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$. Si λ et μ sont des paramètres homogènes fixant la position d'une tangente en A à la surface F, nous supposerons que l'homographie H détermine dans le faisceau des tangentes l'homographie binaire involutive

$$\lambda' : \mu' = \lambda : \varepsilon^{\alpha-1}\mu \tag{1}$$

ε étant une racine primitive d'ordre p de l'unité et α étant un entier compris entre 1 et p,

En posant $\eta = \varepsilon^{\alpha}$, l'homographie (1) pourrait d'ailleurs être remplacée par

$$\lambda' : \mu' = \eta^{\beta-1}\lambda : \mu$$

β étant l'entier compris entre 1 et p tel que $\alpha\beta - 1$ soit multiple de p.

Nous considérerons les solutions en nombres entiers positifs λ, μ telles que l'on ait

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p), \tag{2}$$

la somme $\lambda + \mu$ étant inférieure à p.

Soit λ_1, μ_1 la solution telle que $\lambda_1 + \mu_1$ soit minimum. Nous avons

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = hp, \; \mu_1 + \beta\lambda_1 = h'p,$$

h et h' étant des entiers positifs.

Nous commencerons par l'étude du cas où $\lambda_1 = \mu_1$. Alors les égalités précédentes donnent

$$\lambda_1(1 + \alpha) = hp, \; \mu_1(1 + \beta) = h'p.$$

λ_1 ne peut diviser p et $1 + \alpha$ ne peut le faire que si $\alpha = p - 1$. Écartons ce cas. Alors h est multiple de $\lambda_1(1 + \alpha)$ et cela conduit à une équation de la forme $kp = 1$, ce qui est absurde. On a donc $\alpha = p - 1$ et pour la même raison $\beta = p - 1$. La relation (2) donne $\lambda_1(1 + \alpha) = p$ d'où $\lambda_1 = \mu_1 = 1$.

Si $\lambda_1 = \mu_1$, on a $\alpha = \beta = p - 1$ et $\lambda_1 = \mu_1 = 1$.

2. Nous pouvons attacher à chaque axe de l'homographie H une puissance de ε et précisément nous attacherons à σ_i le nombre ε^i.

L'homographie (1) possède deux droites unies t_1 et t_2. Nous supposerons que la tangente t_1 s'appuie sur l'axe σ_1 et la tangente t_2 sur l'axe σ_{p-1}.

Désignons par $| \mathrm{C} |$ le système des sections hyperplanes de F, par $| \mathrm{C}_k |$ le système découpé par les hyperplans ξ_k passant par les axes de H sauf par σ_k, par r_k sa dimension.

Les hyperplans ξ_1 passant par $\sigma_0, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ découpent sur F les courbes C_1 qui passent simplement par A en y touchant la droite t_1.

Observons que les courbes C_0 qui passent par A rencontrent une courbe C_1 en des groupes de points de l'involution I, par conséquent le nombre de points d'intersection de ces courbes absorbés en A est multiple de p. Or, les courbes C_0 passant par A acquièrent un point double en ce point et passent simplement par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, p - 2)$, donc *Les courbes* C_1 *passent simplement par les points* A, $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, p - 2)$.

3. Avant d'aller plus loin, rappelons certaines propriétés. Si nous désignons par λ, μ les solutions de la congruence (2) telles que $\lambda + \mu$ soit inférieur à p, on a $\lambda_i = \mu_i = i \; (i = 1, 2, \ldots, \nu)$. Nous désignerons par $| \mathrm{C}_0^i |$ le système des courbes C_0 ayant la multiplicité $\lambda_i + \mu_i$ en A.

Les courbes C_0^i passent donc $\lambda_i + \mu_i$ fois par A, en général μ_i fois par $(\alpha, 1)$ et λ_i fois par $(\beta, 1)$. Le point A est l'origine de deux branches superlinéaires appartenant à toutes les courbes C_0^i, l'une contenant le point $(\alpha, 1)$ et se terminant par un point simple P_i uni de première espèce pour l'involution. L'autre branche passe par le point $(\beta, 1)$ et se termine par un point simple P'_i uni de première espèce pour l'involution.

Désignons par Φ la surface image de l'involution I obtenue en rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace à r_0 dimensions. Aux courbes $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$ correspondent sur Φ les courbes de systèmes complets $| \Gamma_0 |, | \Gamma_1 |, \ldots, | \Gamma_{p-1} |$, le premier étant le système des sections hyperplanes.

Au point A correspond sur Φ un point de diramation A' qui est double biplanaire pour la surface. Aux domaines des points $P_1 = (\alpha, p-2), P_2, \ldots, P_\nu$ et $P'_2 = (\beta, p-2), P^i_2, \ldots, P'_\nu$ correspondent sur Φ des courbes rationnelles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu, \gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_\nu$ de degré virtuel -2. Au point de vue des transformations birationnelles, le point A' est équivalent à l'ensemble des courbes

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu, \gamma'_\nu, \gamma'_{\nu-1}, \ldots, \gamma'_2, \gamma'_1,$$

chacune d'elles rencontrant la précédente et la suivante en un point mais ne rencontrant pas les autres (γ_1 ne rencontre que γ_2 et γ'_1 ne rencontre que γ'_2).

Si l'on considère la surface Φ_1 projection à partir de A de la surface Φ sur un hyperplan de l'espace ambiant, les courbes γ_1, γ'_2 sont deux droites se rencontrant en un point A'_1 qui est double biplanaire pour Φ_1 si $p > 3$.

Le point A' est un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs $\nu - 1$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire.

4. Les systèmes de courbes multiples de $|C|$ se comportent aux points nnis de l'involution comme les courbes de $|C|$. Par exemple, les courbes du système $|(pC)_0|$ passant par A acquièrent en ce point la multiplicité deux et le système comprend donc les courbes $C_0^1 + (p-1)C_0$.

Observons que les hyperplans ξ_{p-1} découpent sur F les courbes C_{p-1} qui passent simplement par les points A, $(\beta, 1), (\beta, 2), \ldots, (\beta, p-2)$. Aux systèmes $| C_1 |, | C_{p-1} |$ sont attachés les nombres $\varepsilon, \varepsilon^{p-1}$. Dans le système $| pC |$ se trouve un système $| (pC)_1 |$ dont les courbes passent simplement par les points A, $(\alpha,), \ldots, P_1$ qui comprend les courbes

$$(p-1)C_0 + C_1, (p-2)C_0 + 2C_1 + C_{p-1}, (p-3)C_0 + 3C_1$$
$$+ 2C_{p-1}, \ldots (p-2k+1)C_0 + kC_1 + (k-1)C_{p-1}, \ldots,$$
$$2C_0 + \nu C_1 + (\nu - 1)C_{p-1}, (\nu+1)C_1 + \nu C_{p-1}.$$

Ces courbes ont en A un point simple, triple, ..., multiple d'ordre $2k-1, \ldots,$ d'ordre $2\nu - 1, 2\nu + 1 = p$. Il en résulte que dans le système $| C_1 |$ se trouvent des courbes ayant les mêmes multiplicités que les courbes précédentes. En A, ces courbes ont d'ailleurs des tangentes fixes de sorte qu'on les obtiendra successivement en imposant aux courbes d'un système le contact avec un droite distincte de t_1, t_2.

5. Les courbes C_1 assujetties à toucher en A une droite distincte de t_1, t_2 acquièrent en ce point une multiplicité supérieure à un qui ne peut être que trois. Elles forment un système que nous désignerons par $| C_1^1 |$ dont les courbes se comportent en A comme les courbes $2C_1 + C_{p-1}$.

Les courbes C_1^1 ont en commun des branches d'origine A se terminant par des points unis de première espèce pour l'involution. L'une de ces branches passe simplement par le point $(\beta, 1)$ et doit nécessairement passer par le point $(\beta, p-2) = P_1'$ puisque les points intermédiaires sont tous unis de seconde espèce.

L'autre branche passe deux fois par le point $(\alpha, 1)$. Supposons qu'elle contienne deux fois chacun des points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, x)$, une fois le point $(\alpha, x+1)$, et éventuellement d'autres points infiniment voisins du dernier. Le nombre des points d'intersections des courbes C_1^1 et C_0^1 absorbés en A est $p + 5 + 2x$ qui doit être multiple de p, donc $2x + 5$ est multiple de p.

Observons que si l'on suppose que les courbes C_0^2 passent deux fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, x')$ et une fois par le point $(\alpha, x'+1)$, on doit avoir

$$2x' + 1 = p - 3 = 2\nu - 3,$$

d'où $x' = \nu - 2$. Ces courbes passent par le point $(\alpha, \nu - 1, 1)$ qui est le point P_2. On a nécessairement $x = x' = \nu - 2$ et les courbes C_1^1 passent simplement par le point P_2.

Aux courbes C_1^1 correspondent sur Φ des courbes Γ_1 que nous désignerons par Γ_1' qui rencontrent en un point les courbes γ_2 et γ_1' mais non les autres courbes γ.

6. Les courbes C_1^1 qui doivent toucher en A une droite distincte de t_1, t_2 ont en ce point une multiplicité supérieure à trois et précisément égale à cinq. Elles ne comportent au point A comme les courbes $3C_1 + 2C_{p-1}$, nous les désignerons par C_1^2. Ces courbes passent trois fois par le point $(\alpha, 1)$ et deux fois par le point $(\beta, 1)$. Nous allons voir qu'elles passent simplement par les points P_3 et P_2'.

Les courbes C_1^2 ont en commun deux branches superlinéaires d'origine A, l'une passe trois fois par $(\alpha, 1)$, l'autre deux fois par $(\beta, 1)$. Ces branches se terminent des points unis pour l'involution. Le nombre des points d'intersection de chacune de ces branches soit avec les courbes C_0^1, soit avec les courbes C_0^2, soit enfin avec les courbes C_0^3 absorbées en A doit être multiple de p.

Supposons que la première branche passe trois fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, x)$ et y fois par le point $(\alpha, x + 1)$. En considérant les intersections absorbées en A par les courbes C_0^1, on voit que l'on doit avoir $3x + y$ multiple de p.

Le nombre p étant premier, est de la forme $6t + 1$ ou $6t + 5$. Dans le premier cas, on a $x + 2t - 2, y = 1$ et la branche considérée se termine au point $(\alpha, 2t - 1, 2)$, qui est simple pour les courbes et n'est autre que le point P_3. Dans le second cas, on a $x = 2t - 1$, $y = 2$ et la branche passe simplement par le point $(\alpha, 2t, 1, 2)$, c'est-à-dire par le point P_3.

On voit donc que la branche considérée coïncide avec la branche commune aux courbes C_3^0 passant par le point $(\alpha, 1)$.

On voit de même que la branche contenant le point $(\beta, 1)$ passe deux fois par les points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, \nu - 2)$, une fois par le point $(\beta, \nu - 1)$ et par le points $(\beta, \nu - 1, 1)$, ce dernier étant le point P_2'.

Les nombres des points d'intersection absorbés en A des courbes C_1^2 avec les courbes C_0^1, C_0^2, C_0^3 sont respectivement $4\nu + 2 = 2p$, $8\nu + 4 = 4p$, $10\nu + 5 = 5p$.

Les courbes Γ_1^2 qui correspondent aux courbes C_1^2 sur la surface Φ rencontrent en un point les courbes γ_3, γ_2' mais ne rencontrent pas les autres courbes γ.

7. Les mêmes raisonnements conduisent aux résultats suivants, en supposant $k < \nu$.

Les courbes C_1^k se comportent au point A comme les courbes $(k+1)C_1 + kC_{p-1}$. Elles ont donc la multiplicité $2k+1$ en A et ce point est l'origine de deux branches superlinéaires appartenant aux courbes. La première passe par le point $(\alpha, 1)$ et par le point P_{k+1} qui est simple pour les courbes. Les points de cette branche appartiennent aux courbes C_0^{k+1}. L'autre branche contient le point $(\beta, 1)$ et passe simplement par le point P'_k. Elle appartient à toutes les courbes C_0^k.

Sur la surface Φ, les courbes Γ_1^k qui correspondent aux courbes C_1^k rencontrent en un point les courbes γ_{k+1}, γ'_k mais ne rencontrent pas les autres courbes γ.

Les courbes C_1 qui se comportent en A comme les courbes $C_1 + C_0^k$ sont des courbes du système $| C_1^k |$ particulières, car les courbes qui leur correspondent sur Φ rencontrent en un point les courbes $\gamma_1, \gamma_k, \gamma'_\lambda$.

Restent les courbes C_1^ν qui se comportent en A comme les courbes $(\nu+1)C_1 + \nu C_{p-1}$. Le système de ces courbes est nécessairement formé par des courbes C_1 jointes à des courbes $(\nu-1)C_0 + C_0^\nu$.

Les courbes C_0^ν passent $2\nu = p - 1$ fois par le point A, une fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, \nu-1) = P_\nu$ et une fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, \nu-1) = P'_\nu$. Il en résulte que les courbes C_1 passent p fois par A, deux fois par $(\alpha, 1)$, une fois par $(\alpha, 2), \ldots, P_1$, une fois par $(\alpha, 1, 1), \ldots, P_\nu$ et enfin une fois par $(\beta, 1), (\beta, 1, 1), \ldots, P'_\nu$.

Les courbes Γ_1^ν qui leur correspondent sur Φ rencontrent en un point les courbes γ_1, γ_ν et γ'_ν, mais non les autres courbes γ.

8. Entre les courbes Γ_0 et Γ_1 existe une relation fonctionnelle que l'on déduit d'une relation plus générale que nous avons établie dans notre *Théorie des involutions cycliques*. Dans le cas actuel, on a

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 + 2\nu\gamma_1 + (2\nu-1)\gamma_2 + \cdots + (2\nu-i)\gamma_i + \cdots + (\gamma+1)\gamma_\nu$$
$$+ \nu\gamma'_\nu + (\nu-1)\gamma'_{\nu-1} + \cdots + (\nu-i)\gamma'_i + \cdots + 2\gamma'_2 + \gamma'_1.$$

Il existe d'autre part une relation fonctionnelle entre les courbes Γ_1 et Γ_1^1. Écrivons la sous la forme

$$\Gamma_1 \equiv \Gamma_1^1 + y_1\gamma_1 + y_2\gamma_2 + \cdots + y_\nu\gamma_\nu + y'_\nu\gamma'_\nu + \cdots + y'_2\gamma'_2 + y'_1\gamma'_1.$$

En prenant les intersections avec $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$, on a

$$1 = -2y_1 + y_2, 0 = 1 + y_1 - 2y_2 + y_3, 0 = y_2 - 2y_3 + y_4, \ldots$$

On en déduit

$$y_2 = 2y_1 + 1, y_3 + 1, \ldots, y_\nu = \nu y_1 + 1,$$

$$y' = (\nu + 1)y_1 + 1, \ldots, y_2^1 = (2\nu + 1)y_1 + 1, \; y_1' = 2\nu y_1 + 1.$$

En prenant l'intersection avec γ_1', on a

$$1 + y_2' - 2y_1' = 0,$$

d'où $(2\nu + 1)y_1 = 0$ et $y_1 = 0$. On a donc la relation

$$\Gamma_1 \equiv \Gamma_1^1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_\nu + \gamma_\nu' + \cdots + \gamma_1'.$$

On obtiendra de même la relation fonctionnelle entre les courbes Γ_1 et Γ_1^k pour $k < \nu$. Précisément

$$\Gamma_1 \equiv \Gamma_1^k + \gamma_2 + 2\gamma_3 + \cdots + (k-1)\gamma_k + k(\gamma_{k+1} + \cdots + \gamma_\nu + \gamma_\nu' = \cdots + \gamma_k')$$
$$+ (k-1)\gamma_{k-1}' + (k-2)\gamma_{k-2}' + \cdots + 2\gamma_2' + \gamma_1'.$$

Enfin, on a

$$\Gamma_1 \equiv \Gamma_1^\nu + \gamma_1 + 2\gamma_2 + \cdots + \nu\gamma_\nu + \nu\gamma_\nu' + \cdots + 2\gamma_2' + \gamma_1'.$$

9. Nous allons maintenant nous occuper des courbes C_2 qui sont associées aux nombres ε^2.

Observons que les courbes C_2 sont découpées sur F par les hyperplans ξ_2 qui contiennent les axes σ_0, σ_1 ,σ_{p-1} et par conséquent le plan tangent en A à la surface F. Les courbes C_2 ont donc un point au moins double en A, mais si ce point est double, il ne peut avoir comme tangentes t_1 et t_2. Les courbes C_0^1 ont en A un point double avec t_1, t_2 comme tangentes. En général, les points unis de l'involution I n'ont pas la même structure, mais nous avons construit dans notre seconde note, n° 8, un exemple d'une involution cyclique d'ordre p dont tous les points unis ont la même structure, les tangentes unies en chacun d'eux rencontrent σ_1 et σ_{p-1}. Dans cet exemple, les systèmes $| C_2 |$ et $| C_0^1 |$ coïncideraient, ce qui est absurde. Si A est double pour les courbes C_2, celles-ci ont leurs tangentes confondues soit avec t_1, soit avec t_2. Nous allons voir que c'est avec t_1.

Le système $| pC |$ contient un système $| (pC)_2 |$ dont les courbes ont en A le même comportement que les courbes C_2. Ce système contient les courbes

$$(p-2)C_0+2C_1,(p-4)C_0+3C_1+C_{p-1},\ldots,$$
$$(p-2k-2)C_0+(k+2)C_1+kC_{p-1},\ldots,$$
$$3C_0+\nu C_1+(\nu-2)C_{p-1},2C_0+(2\nu-1)C_{p-1},$$
$$C_0+(\nu+1)C_1+(\nu-1)C_{p-1}.$$

On en déduit que les courbes du système $|(pC)_2|$ et par conséquent les courbes C_2 ont en A un point double, ou un point quadruple, ... ou un point de multiplicité $2k+2,\ldots,$ ou un point multiple d'ordre $2\nu-1$ ou enfin un point de multiplicité 2ν. Nous désignerons par C_2^k les courbes C_2 qui ont la multiplicité $2k-2$ en A, tandis que les courbes de l'avant-dernier système seront désignées par C_2^ν.

10. Considérons les courbes C_2. Elles ont en A un point double avec une tangente unique t_1.

On peut faire deux hypothèses: Ou bien les courbes C_2 passent deux fois par les points A, $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, p-2) = P_1$, ou bien elles passent deux fois par les points A, $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \nu-2)$ et une fois par les points $(\alpha, \nu-1)$; $(\alpha, \nu-1, 1) = P_2$. Le nombre des points d'intersection des courbes C_0^1 et C_2 absorbés en A est dans le premier cas égal à $2p$, dans le second à p. Si nous désignons par n l'ordre de la surface Φ, F sera d'ordre pn et les courbes C_2 découperont sur une courbe C_0^1 dans le premier cas une série d'ordre $(p-2)n$, dans le second une série d'ordre $(p-1)n$. Ces séries ayant la même dimension, la première doit être un cas particulier de la seconde et on en conclut que les courbes C_2 passent deux fois par les points A, $(\alpha, 1), \ldots,$ $(\alpha, \nu-2)$, une fois par $(\alpha\nu-1)$, P_2.

Sur la surface Φ, les courbes Γ_2 rencontrent la courbe γ_2 mais non les autres courbes γ.

11. Passons à l'examen des courbes C_2^1 qui se comportent en A les courbes $3C_1+C_{p-1}$. Elles passent donc quatre fois par A et celui-ci est l'origine de deux branches dont les premiers points sont communs à toutes les courbes. L'une passe par le point $(\alpha, 1)$, l'autre par le point $(\beta, 1)$. Comme la deuxième branche passe simplement par $(\beta, 1)$, elle passe nécessairement par le point $(\beta, p-2) = P_2'$, car tous les points intermédiaires sont unis de seconde espèce pour l'involution.

En répétant le raisonnement déjà fait plusieurs fois, on voit que la première branche passe trois fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ... pour passer simplement par le point P_3.

On trouverait de même le comportement en A des courbes C_2^3, C_2^3, ..., $C_2^{\mu-1}$. Il est plus simple d'énoncer le comportement des courbes correspondantes Γ_2^2, Γ_2^3 ..., $\Gamma_2^{\mu-1}$ sur la surface Φ.

Les courbes C_2^k ont la multiplicité $2k-2$ en A. Les courbes Γ_2^k rencontrent en un point les courbes γ_{k+1} et γ'_{k-1}, mais non les autres courbes γ.

Reste à examiner le comportement des courbes C_2^ν. Un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut pour les courbes C_1^ν montre que ces courbes passent $p-3$ fois par A, trois fois par $(\beta, 1)$, une fois par $(\beta, 2)$, ..., P′, deux fois par $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, ..., $(\beta, 1, \nu-3)$, une fois par $(\beta, 1, \nu-2)$ et par $(\beta, 1, \nu-2, 1) = P'_{\nu-1}$. Les courbes Γ_2^ν rencontrent les courbes γ'_1 et $\gamma'_{\nu-1}$ mais non les autres courbes γ.

La relation fonctionnelle entre les courbes Γ_0 et Γ_2 s'écrit

$$p\Gamma_0 \equiv p(\Gamma_2 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\nu)$$
$$+ (2\nu-1)\gamma_1 + (2\nu-2)\gamma_2 + \cdots + (2i-1)\gamma_{\nu-1} + \cdots \gamma_\nu)$$
$$+ 2(\nu\gamma'_\nu + \cdots + 2\gamma'_2 + \gamma'_1).$$

On peut sans difficulté obtenir les relations fonctionnelles entre les courbes Γ_2 et les courbes Γ_2^1, Γ_2^2, ..., Γ_2^ν en suivant le procédé utilisé pour les courbes Γ_1.

11. De ce qui précède on conclut que le point A est l'origine de 2ν branches, deux linéaires et $\nu-2$ superlinéaires. Les premières contiennent les points P_1, P'_1, les autres les points $P_2, P_3, \ldots, P_\nu$, P^i_ν, ..., P'_3, P'_2 et les branches passent chaque fois simplement par ces points.

Les courbes C comprises dans un système linéaire appartenant à l'involution I et passant par A, ont en commun une ou plusieurs de ces branches en ce sens que ces courbes passent toutes par les points des branches infiniment voisins successifs de A jusqu'au point P correspondant.

Supposons que les courbes d'un système appartenant à l'involution aient en commun les points d'une branche infiniment voisins successifs de A jusqu'au point P_k. Ces courbes ont la multiplicité k en A et t_1 comme tangente unique. Elles appartiennent au système $| C_k |$ et les courbes Γ_k qui leur correspondent sur Φ rencontrent en un point la seule courbe γ_k.

Supposons au contraire que les courbes passent par les points P_k, P'_h. Ces courbes passent $k + h$ fois par A et ont k tangentes confondues avec t_1 et h avec t_2. Elles appartiennent à celui des systèmes $|C_{k+p-h}|$ qui se comporte en A comme les courbes $C_k + C_{p-h}$. Les courbes qui leur correspondent sur Φ rencontrent en un point les seules courbes γ_k et γ'_h.

Observons que si l'on considère les courbes C_k, on obtiendra les mêmes propriétés pour le système des courbes C_{p-k}, les points P et P′ étant remplacés par les points P′, P et les courbes γ, γ' par les courbes γ', γ.

Liège, le 26 février 1971.