Bulletin de la Classe des sciences

Nouvelles recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (cinquième note)

Lucien Godeaux

Résumé

Recherches sur les systèmes linéaires de courbes appartenant à une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis tracées sur une surface algébrique.

Nouvelles recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique

(cinquième note)

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Recherches sur les systèmes linéaires de courbes appartenant à une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis tracées sur une surface algébrique.

Nous considérons sur une surface algébrique F une involution cyclique d'ordre premier p n'ayant qu'un nombre fini de points unis. En un de ces points, la transformation birationnelle T de F en soi, génératrice de l'involution peut déterminer l'identité dans le domaine du premier ordre du point, qui est alors dit point uni de première espèce. Si la transformation T agit dans le domaine d'un point uni A comme une involution binaire ayant deux éléments unis, le point A est dit uni de seconde espèce. Soit | C | un système linéaire de courbes appartenant à l'involution I et ayant pour point-base un point uni A de seconde espèce, multiple d'ordre inférieur à p pour les courbes. Nous avons établi (1) que les courbes C contiennent deux rameaux passant chacun par un des points unis du domaine du premier ordre de A. Les points appartenant à toutes les courbes C, dans les domaines des différents ordres de A, forment une sorte d'arbre dont les noeuds sont l'origine de deux rameaux. Les premiers points de chaque rameau sont unis de seconde espèce pour l'involution, mais le dernier point

(1) Nous avons commencé ces recherches en 1912, alors que nous travaillions sous la direction d'Enriques. Nos travaux sont disséminés dans des revues mais ont été réunis en un volume: *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, éditions Cremonese, 1963).

appartenant à toutes les courbes C est uni de première espèce pour l'involution. Au domaine d'un de ces points P correspond sur une surface Φ image de l'involution une courbe rationnelle γ dont le degré virtuel est en général inférieur à -1 mais dont certaines peuvent être exceptionnelles c'est-à-dire de degré virtuel -1 (Nous avons montré qu'il y a au plus quatre de ces courbes ayant un degré virtuel inférieur à -2. L'arbre d'origine A est ce que nous appelons la structure du point A et l'ensemble des courbes γ, la structure du point de diramation A′ homologue de A sur Φ.

Le point P peut être simple ou multiple pour les courbes C, mais sur celles-ci, le point A est l'origine d'une branche contenant simplement le point P. La structure du point A conduit donc à considérer un certain nombre de branches d'origine A passant simplement par un point uni tel que P et dont tous les points jusqu'au point P et analogues du point P, appartiennent à toutes les courbes C, tandis que les points suivants n'appartiennent plus à toutes ces courbes. Parmi ces branches, il en est deux linéaires, les autres étant superlinéaires.

Nous partons d'un système linéaire de courbes contenant p systèmes linéaires appartenant à l'involution ayant pour points-base les points unis de l'involution, sauf l'un d'eux qui est privé de points-base mais dont nous ne considérons que les courbes passant par un point uni. Toutes les courbes de ces systèmes ont un comportement en A indiqué par la réunion d'un certain nombre de branches d'origine A. Nous avons indiqué, dans la note précédente (1) comment les choses se passaient dans un cas particulier assez général d'ailleurs. Dans la note actuelle nous considérons le cas général, mais en l'appliquant à des exemples à cause de la complication des notations nécessaires pour traiter la question dans toute sa généralité. Pour cela, il faudrait connaître les différents facteurs de $p-1$.

1. Nous considérons, comme dans nos notes précédentes, une surface algébrique F, normale, appartenant à un espace S_r à r dimensions, transformée en elle-même par une homographie périodique H, dont la période $p = 2\nu + 1$ est un nombre premier, possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ dont le premier seul rencontre la surface F, en un nombre fini de points. Sur F, H détermine une involution cyclique

(1) Nos premières notes ont paru dans le Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1970, pp. 1192-1204, 1326-1337, 1338-1351 et 1971, pp. 251-261.

I possédant un nombre fini de points unis, les points de rencontre de σ_0 avec F.

Les hyperplans passant par les axes de H sauf par σ_k seront dénotés par ξ_k. Ils découpent sur F les courbes d'un système linéaire $|\,C_k\,|$ appartenant à l'involution et compris dans le système $|\,C\,|$ des sections hyperplanes de F.

Aux axes de H nous attachons des puissances d'une racine primitive ε d'ordre p de l'unité et précisément à σ_k nous attachons le nombre ε^k.

Soit A un point uni de l'involution. Le plan tangent à F en A rencontre en un point deux des axes de H, le point A étant supposé être uni de seconde espèce.

Nous supposerons que dans le plan tangent, l'homographie H détermine une homographie (non homologique) d'équations

$$x_0' : x_1' : x_2' = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^\alpha x_2,$$

le point A ayant pour coordonnées $x_1 = x_2 = 0$ et α étant un entier compris entre 1 et p. Il y a deux tangentes unies $x_1 = 0, x_2 = 0$. Nous supposerons que la première rencontre σ_1 et la seconde σ_α.

Rappelons que les courbes du système $|\,C_0\,|$ qui passent par le point A forment $\nu + 1$ systèmes linéaires

$$|\,C_0^1\,|, |\,C_0^2\,|, \ldots, |\,C_0^\nu\,|, |\,C_0^{\nu+1}\,|$$

dont les multiplicités en A vont en croissant. Précisément, les courbes C_k ont en A la multiplicité $\lambda_k + \mu_k$, ces courbes ayant λ_k tangentes confondues avec $x_2 = 0$ et μ_k avec $x_1 = 0$, pour $k \leqslant \nu$, les nombres λ_k, μ_k satisfaisant à la congruence

$$\lambda_k + \alpha\mu_k \equiv 0, \quad (\text{mod. } p)$$

Les courbes $C_0^{\nu+1}$ ont en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables.

Il existe un entier β compris entre 1 et p tel que $\alpha\beta - 1$ soit un multiple de p. On a

$$\mu_k + \beta\lambda_k \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

λ_1 et μ_1 étant celle des solutions précédentes telle que $\lambda_1 + \mu_1$ soit minimum, on a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = hp, \; \mu_1 + \beta\lambda_1 = h'p,$$

h et h' étant des entiers positifs.

Posons $p = a\alpha + b$, b étant inférieur à α et soient r et m des entiers satisfaisant aux inégalités

$$rb < \alpha < (r+1)b, \quad m(\alpha - rb) < b < (m+1)(\alpha - rb).$$

Posons de même $p = b'\beta + a'$, a' étant inférieur à β et soient r', m' des entiers satisfaisant aux inégalités

$$r'a' < \beta < (r'+1)a', \quad m'(\beta - r'a') < a' < (m'+1)(\beta - r'a').$$

Soit Φ une surface image de l'involution I, obtenue en rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un cspacc linéaire à r_0 dimensions.

Nous avons démontré que le point de diramation A′ qui correspond sur Φ au point uni A était équivalent à un ensemble de courbes rationnelles

$$\gamma_m, \rho_{11}, \rho_{12}, \ldots, \rho_{1l}, \gamma_\alpha, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1t}, \gamma_{2t}, \ldots, \gamma_{21}, \gamma_\beta, \rho_{21}, \ldots, \rho_{2l}, \gamma_{m'}.$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point mais ne rencontre pas les autres.

Les courbes $\gamma_m, \gamma_\alpha, \gamma_\beta, \gamma_{m'}$ sont respectivement de degrés virtuels $-(m+2)$, $-(a+1)$, $-(b'+1)$, $-(m'+2)$, les autres courbes ayant le degré virtuel -2.

2. Considérons les courbes C_0^1 qui ont la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$ en A, avec λ_1 tangentes confondues avec $x_2 = 0$ et μ_1 avec $x_1 = 0$.

Sur les courbes C_0^1 le point A est l'origine de quatre branches, deux linéaires et deux superlinéaires. Une des branches linéaires passe par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ... et par un point P_1 qui est uni de première espèce pour l'involution et est le dernier point de la branche qui appartient à tous les courbes C_0^1. Ce point est multiple d'ordre a pour ces courbes.

La seconde branche linéaire passe par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ... et par un point P_1' qui est uni de première espèce pour l'involution et appartient à toutes les courbes C_0^1. Il est multiple d'ordre b' pour ces courbes.

Une des branches superlinéaires contient le point $(\alpha, 1)$ et éventuellement d'autres points de cette suite qu'elle abandonne ensuite pour passer par un point P_2 qui est le dernier point de la branche qui appartient à toutes les courbes C_0^1 et qui est multiple d'ordre m pour ces courbes.

L'autre branche superlinéaire se définit de la même manière en supposant qu'elle contient le point $(\beta, 1)$ et qu'elle passe ensuite par un point P'_2 uni de première espèce pour l'involution, dernier point de la branche appartenant à toutes les courbes C_0^1 et multiple d'ordre m' pour ces courbes.

Parmi les points des branches précédentes qui appartiennent à toutes les courbes C_0^1, seuls les points P_1, P_2, P'_1, P'_2 sont unis de première espèce pour l'involution, les autres étant unis de seconde espèce.

Nous désignerons par $\bar{\gamma}_\alpha$ la branche passant par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2), \ldots, P_1$, par $\bar{\gamma}_\beta$ celle qui passe par $(\beta, 1), (\beta, 2), \ldots, P'_1$, par $\bar{\gamma}_m$ la branche superlinéaire passant par $(\alpha, 1), \ldots, P_2$ et par $\bar{\gamma}_{m'}$ celle qui passe par $(\beta, 1), \ldots, P'_2$, ces derniers points étant simples dans chaque cas.

On peut donc dire que le point A est sur les courbes C_0^1 l'origine d'une branche

$$m\bar{\gamma}_m + a\bar{\gamma}_\alpha + b'\bar{\gamma}_\beta + m'\bar{\gamma}_{m'}.$$

Remarquons d'ailleurs que les hyperplans ξ_1 coupent le plan tangent à F en A suivant les courbes C_1 qui passent simplement par A et par les points de la branche $\bar{\gamma}_\alpha$ jusqu'au point P_1. De même, les hyperplans ξ_α découpent sur F les courbes C_α qui passent simplement par les points de la branche $\bar{\gamma}_\beta$ jusqu'au point P'_1.

3. Considérons les courbes C_0^k qui ont la multiplicité $\lambda_k + \mu_k$ en A avec λ_k tangentes confondues avec $x_2 = 0$ et μ_k avec $x_1 = 0$.

Sur ces courbes, le point A est l'origine d'une ou de plusieurs branches dont certaines peuvent être confondues avec $\bar{\gamma}_m, \bar{\gamma}_\alpha, \bar{\gamma}_\beta, \bar{\gamma}_{m'}$ mais dont d'autres passent par une suite de points infiniment voisins successifs de A et par un certain point P, qui appartient à toutes les courbes C_k, est uni de première espèce pour l'involution et au domaine duquel correspond une des courbes $\rho_1, \gamma_1, \gamma_2$ ou ρ_2.

Supposons qu'une de ces branches superlinéaires contienne le point $(\alpha, 1)$ et passe par un point P. La courbe correspondante sera une des courbes ρ_1 ou γ_1. Si c'est une courbe ρ_{1x}, le point P sera désigné par R_{1x}, si c'est une courbe γ_{1x}, il sera désigné par P_{1x}.

Les branches correspondantes, pour lesquelles les points R ou P sont simples, seront désignés par $\bar{\rho}_{1x}$ ou $\bar{\gamma}_{1x}$.

On peut de même considérer les branches d'origine A, superlinéaires, passant par $(\beta, 1)$ et par des points R_{2x} ou P_{2x}, derniers points appartenant à toutes les courbes C_k, aux domaines desquelles correspondent les courbes ρ_{2x} ou γ_{2x}. Nous désignerons ces branches par $\bar{\rho}_{2x}$ ou $\bar{\gamma}_{2x}$.

Nous disposons donc de $l + l' + 2t + 4$ branches d'origine A qui appartiennent à des courbes des systèmes $| C_0^1 |, | C_1 |, \ldots, | C_{p-1} |$ mais il faut faire une remarque. Une de ces courbes peut fort bien contenir une branche d'origine A passant par un point P, dernier point appartenant à toutes les courbes du système considéré, au domaine duquel correspond sur la surface Φ une courbe rationnelle de degré virtuel -1, c'est-à-dire une courbe exceptionnelle. Nous en verrons des exemples.

4. Il convient de faire quelques remarques.

Supposons que le point A soit l'origine de deux branches appartenant à une courbe C^* de l'un des systèmes $| C_0^1 |, | C_1 |, \ldots, | C_{p-1} |$ et que ces branches passent par les points, la première par

$$(\alpha, 1), (\alpha, 2), (\alpha, 2, 1), (\alpha, 2, 2), (\alpha, 2, 2, 1),$$

la seconde par

$$(\alpha, 1), (\alpha, 2), (\alpha, 3), (\alpha, 4), (\alpha, 4, 1), (\alpha, 4, 2), (\alpha, 4, 3), (\alpha, 4, 3, 1),$$
$$(\alpha, 4, 3, 2).$$

Supposons que les courbes C^* passent simplement par les derniers points.

Pour la première branche les points $(\alpha, 2, 2, 1)$ et $(\alpha, 2, 2)$ sont simples, les points $(\alpha, 2, 1), (\alpha, 2)$ sont doubles et les points $(\alpha, 1)$ et A sont quintuples.

Pour la seconde branche, les points $(\alpha, 4, 3, 2), (\alpha, 4, 3, 1), (\alpha, 4, 3)$ sont simples, les points $(\alpha, 4, 2), (\alpha, 4, 1)$ et $(\alpha, 4)$ sont triples, les points $(\alpha, 3), (\alpha, 2), (\alpha, 1)$ et A sont multiples d'ordre dix.

En combinant les deux branches, on voit que les courbes C^* passent quinze fois par le point A.

Si les courbes C^* passaient x fois par le point $(\alpha, 2, 2, 1)$ et y fois par le point $(\alpha, 4, 3, 2)$, elles passeraient $5x + 10y$ fois par le point A.

5. Reprenons la surface Φ. Le cône tangent en A' à cette surface s'obtient de la manière suivante : Appelons Φ_1 la surface abtenue en rapportant projectivement les courbes C_0^1 aux hyperplans d'un espace

à $r_0 - 1$ dimensions. Cette surface est projectivement identique à celle que l'on obtient en projetant Φ de A sur un hyperplan de l'espace ambiant. Le cône tangent en A' à la surface Φ s'obtient en projetant les courbes $\gamma_m, \gamma_\alpha, \gamma_\beta, \gamma_{m,}$ qui existent sur la surface Φ_1.

Le point A″ intersection des courbes $\gamma_\alpha, \gamma_\beta$ sur la surface Φ_1 peut être simple ou double. Dans la définition de la structure du point A', nous avons supposé implicitement qu'au point A″ sont infiniment voisins successifs $t - 1$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. Mais il se pourrait que cette suite de points doubles se termine par un point double conique. Dans ce cas, il faudrait supposer que les courbes γ_{1t} et γ_{2t} coïncident en une seule courbe de degré virtuel -2. Mais la branche $\bar{\gamma}_{1t}$ pourrait passer par $(\alpha, 1)$ ou par $(\beta, 1)$.

6. Nous allons traiter deux exemples. Le premier est celui que nous avons déjà considéré dans notre théorie des involutions cycliques, p. 95. On suppose $p = 31$, $\alpha = 18$, $\beta = 19$; $a = 1$, $b' = 1$, $h = 3$, $h' = 2$, $m = 2$, $t' = 1$.

Nous avons tout d'abord deux branches linéaires

$$\bar{\gamma}_{18}: A^1, (\alpha, 1)^1, (\alpha, 2)^1, \ldots, (\alpha, 17)^1, \ldots$$
$$\bar{\gamma}_{19}: A^1, (\beta, 1)^1, (\beta, 2)^1, \ldots, (\beta, 18)^1, \ldots$$

et deux branches superlinéaires

$$\bar{\gamma}_2 \;: A^2, (\alpha, 1)^2, (\alpha, 2)^1, (\alpha, 2, 1)^1, \ldots$$
$$\bar{\gamma}_1 \;: A^2, (\beta, 1)^2, (\beta, 2)^2, (\beta, 3)^1, (\beta, 3, 1)^1, \ldots$$

et les courbes C_0^1 se comportent au point A comme

$$2\bar{\gamma}_2 + \bar{\gamma}_{18} + \bar{\gamma}_{19} + \bar{\gamma}_1.$$

Précisons nos notations. En écrivant les points qui se succèdent dans une branche, nous mettons en exposant la multiplicité du point et d'autre part, le dernier terme écrit est celui qui appartient à toutes les courbes du système considéré, appartenant à l'involution.

Les courbes C_0^2 ont la multiplicité 11 en A et il apparaît une branche

$$\bar{\gamma}': A^7, (\beta, 1)^2, (\beta, 1, 1)^2, (\beta, 1, 2)^2, (\beta, 1, 3)^1, (\beta, 1, 3, 1)^1, \ldots$$

et les courbes C_0^2 se comportent au point A comme

$$\bar{\gamma}_2 + \bar{\gamma}_{18} + \bar{\gamma}_{19} + \bar{\gamma}_1''$$

Nous avons démontré qu'au domaine du point $(\beta, 1, 3, 1)$ correspondait sur la surface Φ une courbe exceptionnelle. On peut d'ailleurs le vérifier facilement. Si n est l'ordre de la surface Φ, le degré de $|C|$ est égal à pn et celui de $|C_0^1|$ à $pn - 6.31$. Si nous projetons la surface Φ du point A' sur un hyperplan de l'espace à r_0 dimensions de Φ, nous obtenons une surface Φ_1 dont les sections hyperplanes correspondent au courbes C_0^1 et qui est par suite d'ordre $n - 6$. Sur Φ_1 sont tracées deux courbes γ_2, γ_1 qui se rencontrent en un point A''. Si nous projetons Φ_1 de A'' sur un hyperplan de l'espace ambiant, nous obtenons une surface Φ_2 dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes C_0^2 et qui est d'ordre $n - 7$. Il en résulte que le point A'' est simple pour la surface Φ_1, d'où notre assertion.

Les courbes C_0^3 passent 13 fois par le point A et on trouve encore la branche d'origine A

$$\bar{\gamma}'' : A^{11}, (\alpha, 1)^1, (\alpha, 1, 1)^1, \ldots, (\alpha, 1, 10)^1, \ldots$$

mais on démontre que le domaine du point $(\alpha, 1, 10)$ a pour homologue sur Φ une courbe exceptionnelle par le procédé utilisé plus haut, le degré du système $|C_0^3|$ est égal à $pn - 7.31$. La surface Φ_3 construite comme précédemment Φ_2 est d'ordre $n - 7$.

Les courbes C_0^3 se comportent en A comme

$$\bar{\gamma}'' + \bar{\gamma}_{18} + \bar{\gamma}_{19}.$$

Les courbes C_0^4 se comportent en A comme

$$\bar{\gamma}_{18} + \bar{\gamma}' + 3\bar{\gamma}_1.$$

Quant aux courbes C_0^5 données par $\lambda_5 = 6$, $\mu_5 = 10$, elles se comportent en A comme

$$5\bar{\gamma}_2 + 2\bar{\gamma}_1.$$

Le système formé par ces courbes a le degré $pn - 16.31$.

7. Il est intéressant de connaître la puissance de ε qui est attachée aux branches d'origine A dont il vient d'être question. Pour le point $(\alpha, 17)$ on sait que c'est ε et pour le point $(\beta, 18)$ on sait que c'est ε.

Comme la nature de la surface F n'importe pas dans ces questions, on peut supposer que la surface F est un plan.

La transformation

$$T_1 = \begin{pmatrix} x_0 x_1 & x_1^2 & x_1 x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

fait correspondre au point infiniment voisin de A sur $x_1 = 0$ le point $y_1 = y_2 = 0$.

La transformation

$$T_2 = \begin{pmatrix} x_0x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

fait correspondre au point infiniment voisin de A sur $x_2 = 0$ le point $y_1 = y_2 = 0$.

Représentons par (o, u, v) l'homographie qui fait correspondre au point x_0, x_1, x_2 le point $x_0, \varepsilon^u x_1, \varepsilon^v x_2$.

Dans le cas du point $(\alpha, 2, 1)$, effectuons deux fois la transformation T_1 puis une fois la transformation T_2. On obtient ainsi l'homographie $(0, 16, 16)$ et au point $(\alpha, 2, 1)$ est attaché le nombre ε^{16}.

Pour le point $(\beta, 3, 1)$, effectuons trois fois l'opération T_2 puis une fois l'opération T_1. On parvient ainsi à l'opération $(0, 9, 9)$ et au point $(\beta, 3, 1)$ est attaché le nombre ε^9.

8. Comme second exemple, nous prendrons l'involution d'ordre $p = 19$ que nous avons considérée récemment ([1]). Nous avons

$$p = 19, \alpha = 9, \beta = 17, m = m' = 0.$$

Pour abréger, nous supprimerons la barre pour désigner les branches d'origine A, c'est-à-dire que nous écrirons branche γ_{ik} au lieu de $\bar{\gamma}_{ik}$.

Nous avons à considérer les branches suivantes:

γ_9 : $A^1, (\alpha, 1)^1, \dots, (\alpha, 8)^1, \dots$

γ_{12}: $A^2, (\alpha, 1)^2, (\alpha, 2)^2, (\alpha, 2, 1)^1, (\alpha, 2, 1, 1)^1, \dots$

γ_{13}: $A^5, (\alpha, 1)^2, (\alpha, 1, 1)^2, (\alpha, 1, 2)^1, (\alpha, 1, 2, 1)^1$

γ_{21}: $A^1, (\beta, 1)^1, \dots, (\beta, 16)^1, \dots$

γ_{22}: $A^2, (\beta, 1)^2, \dots, (\beta, 6)^2, (\beta, 7), (\beta, 7, 1)^1, \dots$

γ_{23}: $A^3, (\beta, 1)^3, (\beta, 2)^3, (\beta, 3)^3, (\beta, 4)^1, (\beta, 4, 1)^1, (\beta, 4, 2)^1, \dots$

γ_{24}: $A^6, (\beta, 1)^1, (\beta, 1, 1)^1, \dots, (\beta, 1, 5)^1, \dots$

γ_{25}: $A^4, (\beta, 1)^4, (\beta, 2)^3, (\beta, 2, 1)^1, (\beta, 2, 1, 1)^1, (\beta, 2, 1, 2)^1, \dots$

([1]) Voir nos notes *Structure d'un point uni d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de l'Académie royale, 1971, pp. 240-250).

$$\gamma_{26}\colon A^5, (\beta, 1)^1, (\beta, 1, 1)^1, (\beta, 1, 1, 1)^1, \ldots, (\beta, 1, 1, 4)^1, \ldots$$

$$\gamma' \colon A^{12}, (\alpha, 1)^1, (\alpha, 1, 1)^1, \ldots, (\alpha, 1, 10)^1, \ldots$$

Les courbes

C_0^1	se comportent en A	comme	$2\gamma_{11} + \gamma_{21}$,
C_0^2	»	»	$\gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{22}$,
C_0^3	»	»	$\gamma_{11} + \gamma_{13} + \gamma_{23}$,
C_0^4	»	»	$\gamma_{11} + \gamma_{24} + \gamma_{25}$,
C_0^5	»	»	$\gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{25}$,
C_0^6	»	»	$\gamma_{12} + \gamma_{24} + \gamma_{26}$,
C_0^7	»	»	$\gamma_{13} + \gamma_{26}$,
C_0^8	»	»	$\gamma_{13} + 2\gamma_{24}$,
C_0^9	»	»	$\gamma' + \gamma_{24}$.

La surface Φ_8 dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes C_0^8 est d'ordre $n - 11$ et la surface Φ_9 dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes C_0^9 est d'ordre $n - 12$, par conséquent la courbe qui correspond sur Φ au domaine du point $(\alpha, 1, 10)$ est exceptionnelle.

Aux points $(\alpha, 8)$, $(\alpha, 2, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2, 1)$, $(\alpha, 1, 10)$ sont respectivement associés les nombres ε, ε^{13}, ε^4, ε^8, et aux points $(\beta, 16)$, $(\beta, 7, 1)$, $(\beta, 4, 2)$, $(\beta, 1, 5)$, $(\beta, 2, 1, 2)$, $(\beta, 1, 1, 4)$ les nombres ε^9, ε^{14}, ε^3, ε^{11}, ε^7, ε^7, ε^{17}.

Liège, le 12 mars 1971.